注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所
乙組

科目代碼：5001

考試科目：微積分

一作答注意事項一

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 提早交卷者不可攜出試題，請將試題連同答案卷(卡)交予監考人員，攜出將以違規論處。當節考試結束後試題將置於講台，可自行取回，本試場不負保管責任。
7. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「**國立清華大學試場規則及違規處理辦法**」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所乙組(0550)

考試科目（代碼）：微積分(5001)

第一題填充部分，請將答案按照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。

第二~五題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分。

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

   (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$ _____.

   (b) $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x=$ _____.

   (c) $\int_1^3 e^{\sqrt{x}}dx=$ _____.

   (d) $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dxdy=$ _____.

   (e) If $f(x)=x^x$, find $f'(2)$. Ans: _____.

   (f) If $xy+y^3=1$, find the value of y' at the point where $x=0$. Ans: _____.

   (g) Find the length of the curve $y=\int_1^x\sqrt{\sqrt{t}-1}dt$, $1\le x\le 16$. Ans: _____.

   (h) Find the sum of the series $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln 2)^n\left(1+\frac{1}{n!}\right)$. Ans: _____.

2. (10 pts)

   (a) State the Mean Value Theorem.

   (b) Show that

   $$|\sin a-\sin b|\le|a-b| \quad \text{for all } a,b\in\mathbb{R}.$$

3. (10 pts) Among all the ellipses

   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

   that pass through the point $(3,4)$, which one has the smallest area?

4. (12 pts) The curve $y=\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ is rotated about the x−axis to generate a solid.

   (a) Find its volume.

   (b) Find its surface area.

5. (12 pts) Suppose that a function f satisfies the following conditions for all $x,y\in\mathbb{R}$:

   (i) $f(x+y)=f(x)f(y)$

   (ii) $f(x)=1+xg(x)$, where $\lim_{x\to 0}g(x)=1$.

   Show that the derivative $f'(x)$ exists at every value of x and that $f'(x)=f(x)$.