

1. (10%) Find e^{At} , where $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. (20%) Find the zero state response and zero output response of the differential equation:
$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, y(0) = 2, y'(0) = 17.$$
3. (20%) Find the general solution of the differential equation: $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$
4. 函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 對權函數 $w(x) = e^{-x^2}$ 的內積定義為： $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \cdot e^{-x^2} dx$ 。
(5%) (1) 若 $f(x) = 1$, 試求算 $\|f\|_w = ?$
(10%) (2) 在前一小題的內積定義下, 若 $g(x) = g_1(x) = ax$ 與 $g(x) = g_2(x) = bx^2 - 2$ 分別對 $f(x) = 1$ 成正交, 試求常數 a 與 b 之值應為何?
5. (20%) 試求解下列的偏微分方程式：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 1, \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi$$

此處, h 為常數且 $h > 0$, 且當 $y \rightarrow \infty$ 時, $u(x, \infty) \triangleq$ bounded value (有界值)。
6. (15%) 試求線積分： $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = ?$
其中, $\mathbf{F} = y \sin \pi z \mathbf{i} + x^2 e^y \mathbf{j} + 3xyz \mathbf{k}$, 而積分路徑 C 的參數式為 $\mathbf{r} = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$, 起始點為 $(0, 0, 0)$, 終止點為 $(1, 1, 1)$ 。