請依序回答以下所有問題。請務必詳列解題與計算過程。請勿使用任何參考資料、工具。

第一題：向量微積分 (20%)

令S是由$x^2+y^2=4$、$z=1$、$z=4$所圍成之封閉圓柱表面，且$\mathbf{n}$為指向S外部之單位法向量。請計算$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$，式中的向量場為$\mathbf{F}=(x^2+e^y+\sin\sqrt{|z|})\mathbf{i}+(\sin\sqrt{|x|}+y^2+e^z)\mathbf{j}+(e^x+\sin\sqrt{|y|}+z^2)\mathbf{k}$。

第二題：矩陣特徵值與線性常微分方程組 (20%)

(a) 請計算矩陣$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$之特徵值(Eigenvalues)及對應之線性獨立特徵向量(Eigenvectors)。 **(10%)**

(b) 考慮上面所給的矩陣$\mathbf{A}$，請求解線性常微分方程組$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}$的通解(General solution)$\mathbf{x}(t)$。 **(10%)**

第三題：常微分方程式 (15%)

考慮二階線性非齊次常微分方程式$y''-4y'+4y=\frac{e^{2t}}{t},\quad t>0$，請求取通解$y(t)$。

第四題：初始值問題 (15%)

請求解初始值問題：$y''+2y'+2y=\delta(t-\pi),\quad y(0)=0=y'(0)=0$，其中$\delta(t)$為狄拉克函數(Dirac delta function)。

第五題：波動方程式(Wave equation) (15%)

請求解問題中的$u(x,t)$：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0;\quad u(0,t)=u(L,t)=0;\quad u(x,0)=\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$。

第六題：擴散方程式(Diffusion equation) (15%)

請求解問題中的$u(x,t)$：$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0;\quad u(x,0)=\delta(x)$。

【參　考】

拉普拉斯轉換(Laplace transform)：

$Y(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\mathcal{L}y(t);\qquad \mathcal{L}\{y'(t)\}=sY(s)-y(0);\qquad \mathcal{L}\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2};\qquad \mathcal{L}\{\delta(t-c)\}=e^{-cs}$

傅立葉轉換(Fourier transform)：

$\mathcal{F}\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx;\qquad \mathcal{F}\left\{\frac{d^nf}{dx^n}\right\}=(i\omega)^n\mathcal{F}\{f(x)\};\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx=1;\qquad \mathcal{F}\{e^{-ax^2}\}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

試題隨卷繳回