

國立中正大學

114 學年度碩士班招生考試

試題

[第 3 節]

科目名稱	基礎數學
系所組別	數學系統計科學

—作答注意事項—

※作答前請先核對「試題」、「試卷」與「准考證」之系所組別、科目名稱是否相符。

1. 預備鈴響時即可入場，但至考試開始鈴響前，不得翻閱試題，並不得書寫、畫記、作答。
2. 考試開始鈴響時，即可開始作答；考試結束鈴響畢，應即停止作答。
3. 入場後於考試開始 40 分鐘內不得離場。
4. 全部答題均須在試卷（答案卷）作答區內完成。
5. 試卷作答限用藍色或黑色筆（含鉛筆）書寫。
6. 試題須隨試卷繳還。

國立中正大學 114 學年度碩士班招生考試試題

科目名稱：基礎數學

本科目共 3 頁 第 1 頁

系所組別：數學系統計科學

Questions 1 to 12 are multiple-choice questions, each worth 5 points. Please write your answers in the multiple-choice answer section on the first page of the answer sheet. (第 1~12 題為單選題，每題 5 分，答案請填在答案卷第一頁的選擇題作答區)

1. (5%) Find the inverse function of $(1-x^3)^{1/5} + 2$
 - a. $(1-(x-2)^5)^{1/3}$
 - b. $(1-x^5)^{1/3}-2$
 - c. $(1-(x-2)^{1/3})^5$
2. (5%) Find $(f^{-1})'(a)$ where $f(x) = x + \sin x$ and $a = 0$.
 - a. 0
 - b. $1/2$
 - c. 2
3. (5%) Find the derivative of $f(x) = e^{\sin 2x}$
 - a. $e^{\cos 2x}$
 - b. $2e^{\sin 2x}$
 - c. $2 \cos 2x e^{\sin 2x}$
4. (5%) Determine whether the series converges or diverges: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
 - a. Convergent
 - b. Divergent
 - c. cannot determined
5. (5%) Find $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$
 - a. 0
 - b. 1
 - c. $1/3$
6. (5%) Find the indefinite integral $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.
 - a. $\frac{-1}{\ln x} + C$
 - b. $\frac{1}{\ln x} + C$
 - c. $\frac{-x}{\ln x} + C$
7. (5%) Evaluate $f(x) = \int e^{x^2} dx$ as an infinite series
 - a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$
 - b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + C$
 - c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + C$

國立中正大學 114 學年度碩士班招生考試試題

科目名稱：基礎數學

本科目共 3 頁 第 2 頁

系所組別：數學系統計科學

8. (5%) Minimize $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ on the plane $2x - 3y - 4z = 49$

- a. 233 b. 147 c. 130

9. (5%) Find a vector perpendicular to both $[2, 1, 1]$ and $[1, 2, 3]$ in $\mathbb{R}^3$.

- a. $[1, 5, -7]$ b. $[0, -5, 5]$ c. $[1, -5, 3]$

10. (5%) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. If possible, find a matrix B such that $AB = A^2 + 2A$.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

11. (5%) Find the rank of the matrix: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

- a. 1 b. 2 c. 3

12. (5%) Find the coordinate vector $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ relative to the order basis $B' = ((x+1)^3, (x+1)^2, x+1, 1)$

- a. $[1, -2, 0, 0]$ b. $[1, 1, -2, -2]$ c. $[1, -2, 1, 0]$

Questions 13 to 16 are calculation and proof questions, each worth 10 points. Please provide detailed proofs and calculations in your answers. (第 13~16 題為計算證明題，每題 10 分，請詳細寫下證明與計算過程)

13. (10%) Let f be differentiable on (a, b) and continuous on $[a, b]$. Prove that if there is a constant M such that $f'(x) \leq M$ for all $x \in (a, b)$, then $f(b) \leq f(a) + M(b-a)$

14. (10%) Prove that $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$

國立中正大學 114 學年度碩士班招生考試試題

科目名稱：基礎數學

本科目共 3 頁 第 3 頁

系所組別：數學系統計科學

15. (10%) Find all numbers r such that $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & r & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ is invertible.

16. (10%)

a. Prove that the eigenvalues of an $n \times n$ real matrix A are the same as the eigenvalues of A^T .

b. With the reference to part (a), show by a counterexample that an eigenvector of A need not be an eigenvector of A^T .