國立嘉義大學113學年度

應用數學系碩士班(乙組)招生考試試題

科目：機率統計（共100分）

1. （20分）令A與B為兩獨立事件且$0 < \mathrm{P}(A) < 1$和$0 < \mathrm{P}(B) < 1$。

   請討論以下事件是否獨立？

   （a）A^c與B

   （b）$A^c \cap B$ 與 A

   （c）A^c與B^c

   （d）$(A^c \cap B^c)$與$(A \cup B)$

2. （20分）已知兩種品牌電視的壽命服從常態分配且母體變異數相等。品牌一有5個樣品，平均數$\bar{X} = 8.6$，樣本變異數$s_X^2 = 13.3$；品牌二有8個樣品，平均數$\bar{X} = 9$，樣本變異數$s_X^2 = 8.57$。請以顯著水準$\alpha = 0.05$檢定，這兩種品牌的電視壽命是否有差異?

3. （10分）投擲公正六面骰子一次，令 X 為隨機變數且

$$X = \begin{cases} 0, & \text{若骰子擲出點數 } 1, 3, \text{或 } 5; \\ 1, & \text{若骰子擲出點數 } 2, 4; \\ 2, & \text{若骰子擲出點數為 } 6, \end{cases}$$

   假設獨立投擲骰子兩次，請計算 $P(|X_1 - X_2| = 1)$。

4. 令連續型隨機變數 X 服從以下機率密度函數：

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & -1 < x < 2; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

   令 $Y = X^2$，試求：

   （a）隨機變數 Y 的累積密度函數。（5 分）

   （b）隨機變數 Y 的機率密度函數。（5 分）

5. 令連續型隨機變數向量 (X_1, X_2) 服從以下聯合機率密度函數：

$$(X_1, X_2) \sim f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 < 1; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(a) 分別計算隨機變數 X_1 及 X_2 的邊際機率密度函數。(5 分)

(b) 隨機變數 X_1 及 X_2 是否獨立？須說明原因。(5 分)

［注意］$Z_{0.01} = 2.326$，$Z_{0.02275} = 2$，$Z_{0.025} = 1.96$，$Z_{0.05} = 1.645$。

6. 假設 $X_i;\quad i = 1,2,\dots,n$ 為隨機樣本且服從以下機率質量函數：

$$X_i \sim f_{X_i}(x_i|\mu) = P(X_i = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}, & x_i = 0,1,2,\dots, 0 < \mu; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(a) 寫出 μ 的對數概似函數 $l(\mu) = \ln\big(L(\mu|x_1,\dots,x_n)\big)$。(2 分)

(b) 說明 μ 的最大概似估計式為 $\hat{\mu}_{MLE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$。(8 分)

(c) 請問 $P(X_1 = 0) = e^{-\mu}$ 的最大概似估計式為何？(5 分)

7. 某公司宣稱其發售之產品顧客滿意度 (p) 至少 50%。調查結果顯示，100 位該產品使用者中有 40 位表示滿意。站在不信任該公司的立場，你要以假設檢定檢驗其聲名，請問：

(a) 基於調查結果，請對該產品顧客滿意度提出一合理點估計結果 $\hat{p}$。(2 分)

(b) 寫出上述立場的虛無假設 (H_0) 與對立假設 (H_1)。(3 分)

(c) 在顯著水準 α 之下，請寫出對應之拒絕域。(5 分)

(d) 當 $\alpha = 0.05$ 時，結論為何？(5 分)