

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，  
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所  
乙組

科目代碼：4901

考試科目：微積分

### —作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所(0549) 乙組

考試科目 (代碼)：微積分(4901)

共 1 頁，第 1 頁 \*請在【答案卷】作答

第一題填充部分，請將答案依照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。

第二~六題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分。

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

(a) Evaluate  $\int_1^e x \ln x dx$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(b) Find  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x}$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(c) If  $f(x) = \sin(x^2)$ , find  $f^{(10)}(0)$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(d) Find the absolute maximum value of  $f(x) = x + \sin 2x$  on the interval  $[0, \pi]$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(e) Find the solution of the initial-value problem:  $x^2 y' + xy = 1$ ,  $x > 0$  and  $y(1) = 1$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(f) If  $f(x) = 3x + \cos x + 1$ , find  $(f^{-1})'(2)$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(g) Find the point on the cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  that is closest to the point  $(3, 2, 0)$ . Ans: \_\_\_\_\_.

2. (7 pts) Evaluate  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2+2y^2}$  or show that it does not exist.

3. (10 pts) Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n}$ .

4. (10 pts) Suppose the coefficients of the polynomial  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$  satisfy the equation

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Show that the equation  $P(x) = 0$  has a solution between 0 and 1.

5. (10 pts) Show that the sum of the  $x$ -,  $y$ -, and  $z$ -intercepts of any tangent plane to the surface  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$  is a constant.

6. (14 pts) Let  $f(x) = \int_a^b t^x dt$ , where  $0 < a < b$ .

(a) Show that  $f$  is continuous at  $x = -1$ .

(b) Is  $f$  differentiable at  $x = -1$ ?