

| | | | | | |
|------|-----|-----|-----------------|------|-------------|
| 考試科目 | 統計學 | 系所別 | 風險管理與保險學系/精算科學組 | 考試時間 | 2月5日(五) 第四節 |
|------|-----|-----|-----------------|------|-------------|

假設 $\Phi(\cdot)$ 是標準常態分配的累計分配函數。

1. (30 %)

- a. 請陳述貝氏定理 (Bayes' Theorem)
- b. 某一族群中患有 Covid 19 的比例是五千分之一，ABC 試劑可以用來檢測某人是否患有 Covid 19 但非絕對正確。一個正常的人使用 ABC 試劑有萬分之一的機會產生錯誤的結論，一個患者 Covid 19 的人使用 ABC 試劑也有萬分之一的機會產生錯誤的結論。假設 A 君使用 ABC 試劑，而且檢驗結果為陽性，請問 A 君真的患有 Covid 19 的機率？

2. (40 %) 假設 Z_1, Z_2 是獨立的標準常態隨機變數， $U = \Phi(Z_1)$ ， $X = -10 \log(\Phi(Z_2))$ ， $W = Z_1^2 + Z_2^2$ ， $Y = -\log(\Phi(Z_1)) - \log(\Phi(Z_2))$

- a. 請證明 U 為均勻隨機變數，並計算 U 的期望值與變異數。
- b. 請證明 X 為指數隨機變數，並計算 X 的期望值與變異數。
- c. 請證明 W 為卡方隨機變數，並計算 W 的期望值與變異數。
- d. 請證明 Y 為 Gamma 隨機變數，並計算 Y 的期望值與變異數。

3. (30%) $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ 為多元標準常態隨機向量。

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. $Y = HX$ ，請問 Y 的共變異數矩陣為何？
- b. 計算 $\text{Var}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$
- c. $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_8)$ 為多元標準常態隨機向量。

$$G = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}, \quad W = GZ. \quad \text{請問 } W \text{ 的共變異數矩陣為何？}$$

備

註

- 一、作答於試題上者，不予計分。
- 二、試題請隨卷繳交。