

# 國立高雄師範大學 109 學年度碩士班招生考試試題

系所別：數學系

科 目：微積分（全一頁）

※注意：1.作答時請將試題題號及答案依序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。

2.答案卷限用藍、黑色筆作答，以其他顏色作答之部分，該題不予計分。

1. (20%)

(a) 請求出極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$  並詳述其推導過程。

(b) 請求出極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  並詳述其推導過程。

2. (20%)

請證明  $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C_1$ ，其中  $C_1$  為常數。

3. (20%)

(a) For the cardioid  $r = 1 + \sin \theta$ , find the slope of the tangent line when  $\theta = \pi/3$ .

(b) Find the points on the cardioid where the tangent line is horizontal or vertical.

4. (10%)

Evaluate the limit :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} \left( \int_3^x \frac{\sin t}{t} \, dt \right)$$

5. (10%)

Find the sum of the series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

6. (20%)

If  $p > 1$ , evaluate the expression

$$\frac{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots}$$