


注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：統計學研究所

考試科目(代碼)：基礎數學(微積分、線性代
數)(0201)

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 作答中如有發現試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：統計學研究所 (0502)

考試科目 (代碼)：基礎數學 (微積分、線性代數) (0201)

共 3 頁，第 1 頁 *請在【答案卷、卡】作答

一、多選題 (本大題共 48 分，每題 6 分)
請於答案卡作答，答案全對才給分。

1. Suppose $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\sum a_n < \infty$ and $\sum b_n < \infty$. Which of the following series also converge?

(A) $\sum a_n^2$

(B) $\sum a_n a_{n+1}$

(C) $\sum \sqrt{a_n}$

(D) $\sum a_n b_n$

(E) $\sum \sin(a_n)$

2. Which of the following statements are true?

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$

(B) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} < \infty$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} < \infty$

(D) If $\sum a_n$ converges, $\sum |a_n|$ also converges.

(E) If $\sum a_n 6^n$ diverges, $\sum a_n (-8)^n$ also diverges.

3. Which of the following statements are true?

(A) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$

(B) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A'A)$

(C) $\det(cA) = c \det(A)$

(D) If $A^2 = A$, then the eigenvalues of A have to be 1, where A is an $n \times n$ matrix over real numbers.

(E) If the columns of A are linearly independent, then the rows of A are also linearly independent, where A is an $n \times n$ matrix.

4. Which is the value of the integral $\int_{\Omega} x^2 dx dy$, where $\Omega = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$?

(A) 1/2

(B) 1/3

(C) 1/4

(D) 1/5

(E) 1/6

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：統計學研究所 (0502)

考試科目 (代碼)：基礎數學 (微積分、線性代數) (0201)

共 3 頁，第 2 頁 *請在【答案卷、卡】作答

5. Let $f(x, y) = x^3 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$. Which of the following statements are true?

- (A) f has global maximum.
- (B) f has saddle point.
- (C) f has local minimum.
- (D) f has local maximum.
- (E) None of the above.

6. Assume that $f(x) = \int_2^x \frac{e^t - 1}{t} dt$. Then $f^{(6)}(0) = ?$

- (A) $1/6$
- (B) 1
- (C) $\frac{1}{6!}$
- (D) $\frac{1}{6 \cdot (6!)}$
- (E) None of the above.

7. Let $f(x) = \sin(x) + 1/2$ for $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, what is the value of $(f^{-1})'(0)$?

- (A) 1
- (B) $1/2$
- (C) $-1/2$
- (D) $2/\sqrt{3}$
- (E) $-2/\sqrt{3}$

8. Let $f(x) = (\ln x)/x$. Which of the following statements are true?

- (A) f is increasing on $(0, 1)$
- (B) f is concave on $(0, \infty)$
- (C) f has inflection point.
- (D) f has the maximum at e
- (E) f has the maximum value e

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：統計學研究所 (0502)

考試科目 (代碼)：基礎數學 (微積分、線性代數) (0201)

共 3 頁，第 3 頁 *請在【答案卷、卡】作答

二、填充題 (本大題共 28 分，每題 7 分)

請在答案卷第一頁上作答，此大題只需寫答案，不需要計算過程。

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sin \frac{2}{n})^n = \underline{\hspace{2cm}}$

10. Let $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$, where $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ are continuous and differentiable. Then $F'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. Let $a_1 = 0, a_2 = 1$ and $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n-1}$ for $n \geq 2$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. Among all the ellipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ that pass through the point $(5, -3)$, which one has the smallest area?
 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、問答題 (本大題共 24 分)

請在答案卷第二頁上作答，此大題需寫出完整的演算過程。

13. Consider the $m \times m$ matrix $A = \alpha I_m + \beta \mathbf{1}_m \mathbf{1}'_m$, where α and β are scalars, $\mathbf{1}_m$ is a $m \times 1$ vector with elements all equal to 1 and I_m is the $m \times m$ identity matrix.

(A) Find the eigenvalues of A .

(B) Determine the eigenspaces and the associated eigenprojections of A .

(C) For which values of (α, β) will A be nonsingular?