

國立交通大學 104 學年度碩士班考試入學試題

科目：微積分與線性代數(4081)

考試日期：104 年 2 月 6 日 第 1 節

系所班別：統計學研究所 組別：統計所

第 / 頁, 共 / 頁

【不可使用計算機】*作答前請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證之所組別與考科是否相符!!

1. (25 分) 假設變數 (x, y) 之關係為 $F(x, y) = 0$ 。請用 $F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$ 來表示 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

$$(F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2})$$

2. (25 分) 假設 $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{if } x \in Q \\ \sin(3x) & \text{if } x \notin Q \end{cases}$, Q 表示有理數。請找出 $f(x)$ 的連續點。

3. (25 分)

假設 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

- (a) 請問是否存在 5×5 的矩陣 M ，而且 $\text{rank}(M) = 1$ ，滿足 $AM = 0_{4 \times 5}$ ？若存在請找出一個滿足 $AM = 0_{4 \times 5}$ 的 M 。
- (b) 請問是否存在 5×5 的矩陣 M ，而且 $\text{rank}(M) = 2$ ，滿足 $AM = 0_{4 \times 5}$ ？若存在請找出一個滿足 $AM = 0_{4 \times 5}$ 的 M 。
- (c) 請問是否存在 5×5 的矩陣 M ，而且 $\text{rank}(M) = 3$ ，滿足 $AM = 0_{4 \times 5}$ ？若存在請找出一個滿足 $AM = 0_{4 \times 5}$ 的 M 。

4. (25 分) 假設 c 為一常數， $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ 為兩個 $n \times n$ 的矩陣，其中 $a_{i,j} = b_{i,j} \cdot c^{i-j}$ 。請用 $\det(A)$ 以及 c 來表示 $\det(B)$ 。