

考試科目	微積分	所別	應用數學系 <sup>8111</sup> <sub>8116</sub>	考試時間	3月18日 星期六	第一節
------	-----	----	---------------------------------------	------	--------------	-----

國立政治大學圖書館

1. Let  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function and  $f(0) = 0$ . Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = 0. \quad (20\%)$$

2. Find the radius of convergence and the sum of the power series  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$ .

(16%)

3. Let  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  be a function satisfying

$$|f(u) - f(v)| \leq 2|u - v|, \forall u, v \in [a, b].$$

Show that  $f$  is Riemann-integrable on  $[a, b]$  and

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(a) \right| \leq (b-a)^2. \quad (16\%)$$

4. Does there exist a real-valued function  $f(x)$  defined on  $(0, \infty)$  satisfying  $f(1) = 1$  and  $xf'(x^2) = 1$  for all  $x > 0$ .

(16%)

5. Evaluate the line integral  $\oint_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$ , where  $C$  is the closed path defined by  $y = x^2$  and  $x = y^2$  parametrized in the counterclockwise direction.

(16%)

6. Find the points on the curve of intersection of the two surfaces  $x^2 + y^2 = 1$  and  $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$  which are nearest to the origin.

(16%)

備考	試題隨卷繳交
命題委員：	57 (簽章) 年 月 日

命題紙使用說明：1. 試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。  
2. 書寫時請勿超出格外，以免印製不清。  
3. 試題由郵寄遞者請以掛號寄出，以免遺失而示慎重。