1. 考慮如圖一之銳角三角形 ABC，其三邊邊長分別為 a、b 及 c，夾角分別為α、β及γ，O為此三角形的垂心，即三邊垂線的交點。令 **A**、**B** 及 **C** 為三個頂點(A、B 及 C)的位置向量，則此垂心的位置向量可表示成 $\mathbf{O}=\dfrac{(\tan\alpha)\mathbf{A}+(\tan\beta)\mathbf{B}+(\tan\gamma)\mathbf{C}}{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}$。

   (a)(5%) 以 **AC** 向量、**AB** 向量、邊長 b 與 c 表示 $\cos\alpha$；以 **BC** 向量、**BA** 向量、邊長 a 與 c 表示 $\cos\beta$。

   (b)(5%) 由圖一可知，線段 CC′的長度為：$\overline{CC'}=b\sin\alpha=a\sin\beta$，利用此等式及向量 **AB** 與向量 **CC′** 垂直(即 $\mathbf{AB}\bullet\mathbf{CC'}=0$)，推導出 $\mathbf{AB}\bullet\left[(\tan\alpha)\mathbf{A}+(\tan\beta)\mathbf{B}-(\tan\alpha+\tan\beta)\mathbf{C}\right]=0$ 之等式。[Hint: $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$]

   (c)(5%) 因向量 **CO** 與向量 **CC′** 平行，即 $\mathbf{CO}=k_1\mathbf{CC'}$，其中 k_1 為一比例係數，由此等式寫出 O 點的位置向量。

   (d)(5%) 同理，$\overline{BB'}=c\sin\alpha=a\sin\gamma$, $\mathbf{BO}=k_2\mathbf{BB'}$；$\overline{AA'}=c\sin\beta=b\sin\gamma$, $\mathbf{AO}=k_3\mathbf{AA'}$，則可推導出類似(c)的另外兩個 O 點的位置向量。由此三個 O 點的位置向量表示式，則可導出題目所給之 O 點位置向量公式。由 O 點位置向量的公式，則三個比例係數(k_1、k_2 及 k_3)的關係為何?

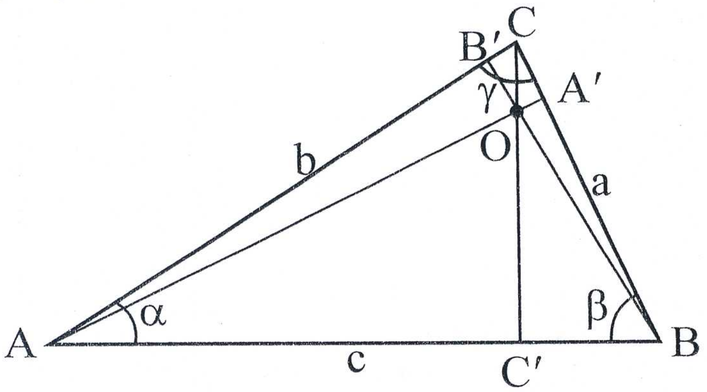

圖 一 問題一之銳角三角形示意圖

2. 若函數 $f(x,t)$滿足偏微分方程式：$\dfrac{\partial f}{\partial t}=-a\dfrac{\partial f}{\partial x}$，其中常數 $a>0$，且 $f(x,0)=0$，$f(0,t)=f_0$。若令 $F(s)$為 f 的 Laplace 轉換，即 $F(s)=L\left[f(x,t)\right]=\int_0^\infty f(x,t)e^{-st}dt$，且 $L\left[\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right]=sF(s)-f(x,0)$。

   (a)(5%) 將上述之偏微分方程式轉換為 Laplace 域的一階常微分方程式。

   (b)(5%) 將邊界條件 $f(0,t)=f_0$ 轉換成 Laplace 域的邊界條件。

   (c)(5%) 利用(b)的結果，求解(a)的常微分方程式。

   (d)(5%) 利用逆轉換公式：$L^{-1}\left[e^{-as}\right]=\delta(t-a)$，$L^{-1}\left[cF(s)\right]=cf(t)$，$c$ 為任一常數，求解 $f(x,t)$。

3. 考慮方陣(square matrix) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 6 & 9 & 4\end{bmatrix}$。

(a)(10%) 求 $\mathbf{A}$ 之行列式(determinant)。

(b)(10%) 求 $\mathbf{A}$ 之逆矩陣(inverse matrix)。

(c)(10%) 若 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}=[0\quad 4\quad 8]^T$，以 Gauss-Jordan 法求解 $\mathbf{x}$。。

(d)(10%) 以(b)中的逆矩陣，驗證(c)中之解是否為 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$。

4. 考慮一函數 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$。

(a) (5%) 求函數 f 在點(1,-1,1)之梯度(gradient)向量 $\nabla f|_{(1,-1,1)}$。

(b) (10%)求 $\nabla f|_{(1,-1,1)}$ 在方向 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 上的投影量及投影向量。

(c) (5%) 函數 f 是否為一個勢能函數(Potential function)?