考試科目	線性代數	所別	應數所 911	考試時間	4 月 19 日 星期六 下午第二節

注意：演算過程之重要步驟必須列出

一、設 $T: P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, $T(f(x)) = f(x) + f'(x) + x^2 f''(x)$

其中 $P_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

10% (1) 求 T 的零維 nullity(T) 與 秩 rank(T).

10% (2) 求 T 的特徵多項式 (characteristic polynomial) det(T) 與 trace(T).

10% (3) T 是否可對角線化？敘明理由.

5% (4) 求 T 的最小多項式 (minimal polynomial) 並敘述所引用的定理.

二、設 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的內積定義如下：

$\langle u, v \rangle = u A v'$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15% (1) 對 $S = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (2,0,1),\ v_3 = (2,2,1)\}$ 執行 Gram-Schmidt 正交化過程，求出 $\mathbb{R}^3$ 的單範正交基底 (orthonormal basis) $\beta = \{x_1, x_2, x_3\}$.

10% (2) 令 $W = \text{span}\{x_1, x_2\}$，求 $z = (1,1,1)$ 在 W 上的正投影 (orthogonal projection).

備考	試題隨卷繳交

考試科目	線性代數	所別	應數所911	考試時間	4月19日 星期六 下午第二節

三. 設 $W_1 = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1 - a_3 = a_4 \} \subseteq \mathbb{R}$

10% $\quad W_2 = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_2 = a_3 = a_4,\ a_1 + a_5 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}$

令 W 是包含 W_1, W_2 的最小子空間

求 $\dim W$. 若有利用到定理,將它敘述出來.

四. 設 $\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$ 是線性方程式系統.

10% 証明: $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$

五. 設 A 是 $n\times n$ 的實數元矩陣, 其特徵

10% 函數為 $f(x)$.

証明: A^{-1} 存在 $\Longleftrightarrow f(0) \neq 0$.

10% 六. 設 A 是 $m\times n$, B 是 $n\times p$ 的矩陣.

証明: $\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$

備考	試題隨卷繳交