59-1

淡江大學 102 學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系　　　　　　　　科目：基礎數學(含微積分、線性代數)

考試日期：3 月 10 日(星期日) 第 2 節　　　　　　本試題共 9 大題， 1 頁

(皆須寫出計算及證明過程, 否則不予計分, 請照題號順序在答案卷上作答)

1. 試計算下列不定積分：

   a. $\int \ln x\,dx$ (7 分)　　　　b. $\int x\cos x\,dx$ (7 分)

2. 若 $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sin^2 x\right)^j$, 試求 $f(\pi/3)$ 之值。(10 分)

3. 令 f 爲定義在 $[1,\infty)$ 的連續實函數(continuous real-valued function)且 $\int_1^x f(t)dt=\sqrt{x}$, 試求 $\int_1^x [f(t)]^2\,dt$ 。(10 分)

4. 令函數 f 定義爲 $f(x)=\begin{cases}0, & \text{當} x=0,\\ x^2\sin(1/x), & \text{當} x\neq 0\end{cases}$ 。試證明函數 f 在 0 爲可微, 並且 $f'(0)=0$ (提示：利用 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 和夾擠定理)。(10 分)

5. 令 A 爲 $n\times n$ 矩陣, 且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 爲其特徵值。試證明 "A 爲可逆(invertible)若且唯若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 皆爲非零" (提示: 考慮 A 的特徵多項式 $\det(A-\lambda I)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, 利用此公式求出 $\det(A)$ 之值)。(10 分)

6. 令 Q 爲 $n\times n$ 標準正交(orthonormal)矩陣(亦即 $Q^TQ=I_n$), 已知 λ 是 Q 的特徵值。(注意: 矩陣 Q 的元素可以複數(complex numbers))

   a. 請證明 $\lambda\neq 0$ 。(提示：利用題 5 的性質) (5 分)

   b. 請證明 $1/\lambda$ 亦爲 Q 的特徵值且 $|\lambda|=1$ 。(提示：利用題 5 的性質以及考慮 Q^TQx 和 $\|Qx\|$) (12 分)

7. 令 a,b,c 爲任意三個實數, 試證明行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$ 。(5 分)

8. 令函數 f,g,h 分別定義爲 $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{2x}$, $h(x)=e^{3x}$, $x\in R$。試證明 f,g,h 爲定義於 R 上的線性獨立函數(提示：考慮 $\alpha_1 f(x)+\alpha_2 g(x)+\alpha_3 h(x)=0$ 及 f,g,h 的一階、二階導數並利用題 7 的性質)。(10 分)

9. 令 $T:R^2\to R^2$ 且對任意 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in R^2$, $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\2x\end{bmatrix}$。在基底爲 $B=\{e_1,e_2\}$, 其中 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 的情形下：

   a. 試求出 T 的矩陣表示式 $[T]_B$ 。(7 分)　　　　b. 試求 $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ 。(7 分)