1. (25%) 以下敍述何者正確 (單、複選皆有可能, 全對才有分)

a) (5%) 有4位同學待在教室裡, 他們的年齡分別是23歲、24歲、24歲和25歲。若現在有一位24歲的同學進去這個教室, 以下敍述何者正確:

(1) 平均年齡不變, 但是標準差變小;
(2) 平均年齡不變, 但是標準差變大;
(3) 平均年齡和變異數皆維持不變;
(4) 平均年齡和變異數皆變大。

b) (5%) 下列有關敍述統計及相關係數的說法何者正確?

(1) 當衡量單位改變時, 標準差也會跟著改變;
(2) 所有的分布形狀都是對稱的;
(3) 中位數受極端值的影響程度比平均數大;
(4) 直方圖是利用圖形方式來呈現資料分布的情形;
(5) 相關係數可以度量 X 和 Y 之間的線性關係;
(6) 相關係數的大小會受極端值影響;
(7) 當 X 和 Y 的變動之間有正向關係時相關係數是正數;
(8) 當 X 和 Y 之間的相關性很小時, 相關係數會非常靠近-1。

c) (5%) 一項研究中, 想了解看電視時數與隔天統計考試成績之間的關係, 從某學校隨機選取8位大三學生, 在某天調查他們看電視時數和隔天統計考試的成績, 列表如下:

看電視時數 (小時)	10	7	2	1	7	4	3	10
統計成績	30	68	100	54	92	83	68	100

利用上列資料計算出2者之間的相關係數爲-0.1044。假設現在將看電視時數的單位由小時改爲分鐘 (1小時=60分鐘), 你認爲會如何影響相關係數?

(1) 相關係數會比-0.1044大;
(2) 相關係數會比-0.1044小;
(3) 相關係數大小不變;
(4) 無法從題目中得知。

若張三告訴某位老師這8位學生看電視時數的標準差$s = -3.5$, 這位老師想了一下, 然後跟他說這是錯的, 你認爲這位老師爲什麼會這樣說? 因爲標準差s:

(1) 不是在原來的單位上計算;
(2) 不可能是負數;
(3) 不可能大於1;
(4) 似乎太小了;
(5) 不是研究者需要關心的事情。

d) (10%) 有一個簡易模型描述某公司股票價格每天變動的情形, 每天股價上升1元的機率是 p, 股價下跌1元的機率是 1-p。假設不同日之間的股價變動是獨立的。請問以下敍述何者是對的:

(1) 兩天後股價仍維持原來價格的機率爲$2p(1-p)$.
(2) 三天後股價上升到1元的機率爲$3p^2(1-p)$.
(3) 三天後股價上升到1元的機率爲$4p^3(1-p)$.
(4) 已知三天後股價會上升到1元, 則在第一天上升1元的機率爲$\frac{3}{4}$.
(5) 已知三天後股價會上升到1元, 則在第一天上升1元的機率爲$\frac{2}{3}$.

注意：背面有試題

2. (10%) 連續拋一枚公正硬幣，直到連續兩次爲正面爲止的事件發生在第2-6次的情況如下：

我們用 H 表示硬幣的正面，而用 T 表示硬幣的反面，從下表可以看出：事件發生在第 n 次的所有可能的種類爲：

n	可能的序列	序列的數目
2	HH	1
3	THH	1
4	HTHH, TTHH	2
5	THTHH, HTTHH, TTTHH	3
6	HTHTHH, TTHTHH,THTTHH, HTTTHH, TTTTHH	5
...	....	...

1) (2%) 試求$n=5$的發生機率；
2) (2%) 試求$n=8$的情況數目；
3) (3%) 令連續拋一枚硬幣，直到連出兩次正面爲止的事件發生在第 n 次拋擲所有可能的方式數爲 $\mathbf{u_{n-1}}$。找出數列$\mathbf{u_{n-1}}$的遞迴關係；
4) (3%) 定義數列 $\{r_n\}$ 如下：

$$r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

假設 $\lim_{n\to\infty} r_n = L$，試求 L 之值。

3. (10 %) Let $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ denote a random sample from $U(0,1)$. What is the distribution of the range $R = Y_{(n)} - Y_{(1)}$, where $Y_{(i)}$ denotes the i^{th} order statistic of the sample.

4. (15 %) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from a $N(\mu, \sigma^2)$ population, where μ and σ^2 are unknown parameters, and let $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ and $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$. Write down the distribution of each of the following random quantity and identify if it is a statistic?

(A) $\bar{X}$ (B) $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$ (C) $X_1 + X_n$ (D) $(X_1-\mu)^2/(X_2-\mu)^2$ (E) $n(\bar{X}-\mu)^2/\sigma^2$

5. (10 %) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be i.i.d. Bernoulli random variables with parameter p. Find the maximum likelihood estimator (MLE) of p. (Make sure it is a maximum.)

參考用

6. (15 %) Let $X_1, X_2, \ldots, X_5$ denote the capacities (in ampere-hours) of 5 batteries sampled from a normal population with $\sum_{i=1}^5 x_i = 718$ and $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 103236$.

a) Estimate the population variance σ^2.

b) Give a 95% two-sided confidence interval for σ^2.

7. (15 %) Let $X_1, \cdots, X_n$ be a sample from the exponential distribution with density $f(x|\theta) = \theta\exp\{-\theta x\}I(x>0)$ and $Y_1, \cdots, Y_n$ be an independent sample from $f(y|\mu) = \mu\exp\{-\mu y\}I(y>0)$, where $I(\cdot)$ denotes the indicator function. Find the likelihood ratio test and its asymptotic distribution for testing $H_0 : \mu = 2\theta$.

注意：背面有試題