

淡江大學 97 學年度碩士班招生考試試題

24

系別：數學學系

科目：微積分 60% 及 線性代數 40%

B

准帶項目請打「V」

簡單型計算機

本試題共 一 頁，十 大題

* 共 10 大題，每大題 10 分，計算過程必須寫清楚，直接寫答案不計分。

一、求極限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 + 2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2}}{4x - 3}$$

二、 $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ ，求 $f^{(k)}(x)$ ，即 f 之 k 階導數 (k 為正整數)。

三、求積分：

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$(2) \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx$$

四、在閉區間 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 裡面找一個數，使得該數以及其倒數的和為最小。

五、甲船在 O 點東方 15 英里，以每小時 20 英里的速度往西前進。乙船在 O 點南方 60 英里，以每小時 15 英里的速度往北前進。一小時之後，二船是在接近當中、還是遠離？以何種速率 (rate)？

六、求 power series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3n+1}$ 的收斂範圍 (interval of convergence)。

七、求矩陣 A 之 column rank：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 7 & 8 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

八、考慮所有 2×2 矩陣所形成之向量空間，證明以下矩陣構成該向量空間的一組基底 (basis)：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

九、找出矩陣 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 之 eigenvalues 及對應之 eigenvectors。

十、假設 A 是 $n \times n$ 的方陣，其 inverse 存在，I 是 $n \times n$ 的單位方陣 (identity matrix)，

證明： $(I + A^{-1})^{-1} = A(A + I)^{-1}$ 。