

靜宜大學 97 學年度碩士班招生考試試題

系所： 資訊工程研究所

科目： 離散數學

共 2 頁

一、單選題 (全部十題, 每題4分, 共40分, 請在選擇題答案格答題, 答錯不倒扣)

1. $P(x, y)$ 是一個 Predicate, 其中 x 的 domain 包含 a 或 b , y 的 domain 包含 1 或 2. 請問 $\exists y \forall x P(x, y)$ 這個命題的含意相當於以下哪一項?
 (1) $(P(a, 1) \vee P(a, 2)) \wedge (P(b, 1) \vee P(b, 2))$
 (2) $(P(a, 1) \wedge P(a, 2)) \vee (P(b, 1) \wedge P(b, 2))$
 (3) $(P(a, 1) \vee P(b, 1)) \wedge (P(a, 2) \vee P(b, 2))$
 (4) $(P(a, 1) \wedge P(b, 1)) \vee (P(a, 2) \wedge P(b, 2))$
2. 以下那個集合是 uncountable?
 (1) $\{x | x \in [0, \frac{1}{2}]\}$ (2) $\{x | x \text{ is positive and } x \in \mathbb{Q}\}$
 (3) $\{x | x \text{ is even integer}\}$ (4) $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$
3. 若 $f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ 請問以下何者錯誤?
 (1) $f(n)$ is $O(n^2)$ (2) $f(n)$ is $O(n \log n)$
 (3) $f(n)$ is $\Omega(n \log n)$ (4) $f(n)$ is $\Theta(n^2)$
4. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$ 這個不等式中 x_1, x_2, x_3 是 nonnegative integers. 請問這個不等式有多少個解?
 (1) 6561 (2) 165 (3) 56 (4) 35
5. $(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots)^3$ 的展開式中 x^{10} 的係數會是多少?
 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 9
6. 若 x, y 是任意實數, 以下何者永遠為真?
 (1) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ (2) $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$
 (3) $\lceil xy \rceil = \lceil x \rceil \lceil y \rceil$ (4) $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lceil x - \frac{1}{2} \rceil$
7. 以下那個 graph 是 bipartite? (K_n : complete graph, W_n : wheel, Q_n : n-Cube, C_n : cycle)
 (1) Q_3 (2) C_3 (3) K_4 (4) W_3
8. 若 $A = \{1, 2, \dots, 100\}$, 以下 relations on A 哪一個是 equivalence relation?
 (1) $\{(a, b) | (a-b) \text{ 是 } 5 \text{ 的整數倍}\}$ (2) $\{(a, b) | a = b \pm 1\}$ (3) $\{(a, b) | a + b = 5\}$
 (4) $\{(a, b) | a, b \text{ 有 } 1 \text{ 以外的公因數}\}$
9. 如果 A, B, C 是集合, 以下那一項是錯誤的?
 (1) $A \cup (B - A) = A \cup B$ (2) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
 (3) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$ (4) $A \subseteq B \text{ iff } \overline{B} \subseteq \overline{A}$
10. How many derangements of $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ begin with the integers 1, 2, and 3, in some order? (註: 這六個數的原來順序是 123456, derangement 表示每個數字都沒有排在原來的位置上, 如 351624.)
 (1) 720 (2) 719 (3) 265 (4) 4

(非選擇題在另一頁)

靜宜大學 97 學年度碩士班招生考試試題

系所： 資訊工程研究所

科目： 離散數學

共 2 頁

二、非選擇題 (共 6 題, 每題 10 分。請在非選擇題答案格答題, 並請依題號作答, 否則不予計分。)

1. (a) Solve the euqation

$$\sum_{k=0}^n (-2)^k \binom{n}{k}$$

- (b) 如果 $H_n = 2H_{n-1} - 1$, 而且 $H_1 = 1$. 請問 H_n 的通式為何?

2. (a) $3^{33} \bmod 14 = ?$

- (b) Solve the linear congruence (求出 x 的值)

$$59 \cdot x \equiv 11 \pmod{23}$$

3. 如果 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 是 xyz 三度空間中 九個不同點的點座標, 而且他們的座標值都是整數。請證明這九個點之中, 至少有兩個點的中點 其 x, y, z 座標值也都是整數。(Hint: 可以用鴿籠原理證明。另外, 奇數和偶數的平均值不會是整數)

4. 若 f_n 代表第 n 個 Fibonacci number, ($f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$) 請證明 (可用數學歸納法)

$$f_0 f_1 + f_1 f_2 + \cdots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$$

5. In how many ways can a $2 \times n$ rectangular board be tiled using 1×2 and 2×2 pieces?

6. 請證明質數 (prime) 的個數有無限多個。