

1. (25%) 求下列極限值：

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x+x^2}{7+4x-5x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+7t+7}{t^2-4t-5}$

(d) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{\sin t}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x}$

2. (25%) 解算下列各題：

(a) $D_t \left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3} \right)^{13}$

(b) $y^3 - x y^2 + \cos(xy) = 2$ ，求此曲線的切線方程式。

(c) $f(x, y) = x^2 - 2x + \frac{1}{4}y^2$ ，求此函數的最大或最小值。

(d) $\int (x^3+6x)^5 (6x^2+12) dx$

(e) $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} x \sin^3(x^2) \cos(x^2) dx$

3. 在台灣嘉南平原進行資源探測，發現在函數 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ 所描述的區域

中可能含有稀有礦物。請：

(a) 繪圖表示此區域。(10%)

(b) 因為需要對此區域架設圍籬，請計算此區域之周長。(15%)

4. 已知 second partial derivatives 的定義如下： $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$ 且 $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ ，

(a) 請推導 f_{xy} 與 f_{yx} 的關係。(5%)

(b) 若 $f(x, y) = x e^y - \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 y^2$ ，請計算 f_{xx} 、 f_{yy} 、 f_{xy} 。(10%)

(c) 請寫出 f_{yyx} 的定義，並計算(b)小題中的結果。(10%)