

1. 設隨機變數(random variable) X 之動差生成函數(moment-generating function) 為

$$M_X(t) = \frac{2}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{4t}, \quad -\infty < t < \infty$$

- (1) 試求 X 的平均值(mean)、變異數(variance)及其機率分布(probability distribution)。(10 分)
 - (2) 若令 $Y = (X-1)(X-4)$ ，試求 Y 之平均值、變異數、機率分布、動差生成函數。(10 分)
 - (3) 試求給定 $Y = y$ 的條件下， X 的條件分布(conditional distribution)、條件平均值(conditional mean)、條件變異數(conditional variance)、條件動差生成函數(conditional moment-generating function)。(10 分)
 - (4) 試求 X 與 Y 之聯合分布(joint distribution)及其聯合動差生成函數(joint moment-generating function)。(10 分)
2. 令 X_1, X_2, \dots, X_n 表取自一定義在區間 $[\theta-1, \theta+1]$ 上之均勻分布(uniform distribution)的一組樣本大小(sample size)為 n 的隨機樣本(random sample)。
- (1) 試求 θ 之概度函數(likelihood function) 及其最大概度估計式(maximum likelihood estimator) $\hat{\theta}$ 。(10 分)
 - (2) 試利用動差法(method-of-moments)求 θ 之估計式(estimator) $\tilde{\theta}$ 。(10 分)
 - (3) 試問： $\tilde{\theta}$ 是否為 θ 之無偏估計式(unbiased estimator)？請說明理由。並求 $\tilde{\theta}$ 之標準誤差(standard error)。(10 分)
3. $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_X, \sigma_X^2)$, σ_X^2 已知； $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_Y, c\sigma_X^2)$, c 為一已知之正的常數；且 X_1, X_2, \dots, X_n 與 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 互相獨立(independent)。
- (1) 試導出 $\mu_X - \mu_Y$ 的一個 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間(confidence interval), $0 \leq \alpha \leq 1$ 。(10 分)
 - (2) 若訂顯著水準(significance level)為 α ，試導出檢定(test) $H_0: \mu_X = \mu_Y$ vs. $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ 之檢定統計量(test statistic) 及其取樣分布(sampling distribution)、棄卻域(rejection region)。(10 分)
 - (3) 試求上述檢定之檢定力函數(power function)。(10 分)