

大同大學 102 學年度研究所碩士班入學考試試題

考試科目：工程數學

所別：機械工程研究所

第全頁

註：本次考試 不可以參考自己的書籍及筆記； 不可以使用字典； 不可以使用計算器。

1. (10%)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，若  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ ，則  $\lambda$  為特徵值而  $\mathbf{u}$  為特徵向量 (a) 請求出  $\mathbf{A}$  的特徵值與特徵向量，(b)  $\mathbf{D}$  為對角化

矩陣，且  $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ ， $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，求  $\mathbf{P}$  及  $\mathbf{D}$ 。

2. (5%)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ，請利用高斯消去法求  $\text{rank}(\mathbf{A})$

3. (10%) (a)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  求  $\mathbf{A}^{-1}$  (b) 求行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$  的值

4. (10%) 求  $f(x) = x$  在  $[-\pi, \pi]$  的傅利葉級數 (Fourier series)

5. (5%) 一維波動方程式為  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

如果  $f$  為二次可微單變數函數 (twice-differentiable function)，試證明

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \text{ 滿足上述一維波動方程式}$$

6. (10%) 解一維熱傳方程式的初始邊界問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\text{邊界條件: } u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{初始條件 } u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

7. (12%) 求下列微分方程式的通解

$$ydx = (ye^y - 2x)dy$$

8. (8%) 求函數  $M(x, y)$  使下列微分方程式為正合 (exact)

$$M(x, y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0$$

9. (20%) 求下列初值問題

$$y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

10. (10%) 求  $L^{-1} \left[ \frac{2s+5}{(s-3)^2} \right]$ .