

國立高雄大學 102 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：数理統計
考試時間：100 分鐘

系所：
統計學研究所(統計組)
本科原始成績：100 分

是否使用計算機：否

1. 假設隨機變數 X 具有參數 n 與 p 的二項分佈，試計算：
 - (1) X 的動差母函數【5 分】
 - (2) X 的變異數【5 分】
2. 令 $F(x)$ 為隨機變數 X 之累積分配函數且假設其反函數 $F^{-1}(x)$ 存在，若隨機變數 U 具有區間 $[0,1]$ 上的均勻分佈，試證明 $F^{-1}(U)$ 與 X 具有相同分佈。【15 分】
3. X 與 Y 為兩隨機變數，試證明 $Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$ 。【15 分】
4. 假設 X_1, \dots, X_n 獨立且具有相同的常態分佈 $N(\mu, \sigma^2)$ ，試證明 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 。【15 分】
5. 令 $T(X)$ 是 $\tau(\theta)$ 的一不偏估計，且令 $I(\theta) = Var(\frac{\partial}{\partial \theta} \log(L_X(\theta)))$ ，其中 $L_X(\theta)$ 是 X 的概似函數，試證明 $Var(T(X)) \geq (\tau'(\theta))^2 / I(\theta)$ 。【15 分】
6. 假設 X_1, \dots, X_n 獨立且具有相同的常態分佈 $N(\mu, \sigma^2)$ ，試證明 $\bar{X}S^2$ 是 $\mu\sigma^2$ 的最佳不偏估計，其中 $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ 且 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ 。【15 分】
7. 假設隨機變數 X 具有參數 p 的幾何分佈，試證明對任何正整數 j 與 k ，我們有 $Pr(X \geq j+k | X \geq j) = Pr(X \geq k)$ 。【15 分】