

1. (20%) 考慮二階常微分方程式： $h'' + \left(\frac{1}{x} + ax\right)h' = 0$ ，且 $h(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \frac{dh}{dx}\right) = b$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = h_0$ 。

若令 $F(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau$ ，求解 $h(x)$ 並以 F 表示 $h(x)$ 。

2. 若令向量 $\mathbf{a}=(3,4)$ ， $\mathbf{b}=(2,3)$ ：

- (a) (5%) 計算外積(Cross product) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的向量大小。
 (b) (5%) 向量 \mathbf{a} 與向量 \mathbf{b} 的夾角為何?
 (c) (5%) 若 \mathbf{a} 與 \mathbf{b} 為三角形相鄰兩邊的向量，則此三角形的面積為何?
 (d) (5%) 若 \mathbf{a} 與 \mathbf{b} 為平行四邊形相鄰兩邊的向量，則此平行四邊形的面積為何?
 (e) (5%) 若一個五邊形的頂點為 $(0,0)$ ， $(0,2)$ ， $(1,3)$ ， $(4,2)$ ， $(2,0)$ ，利用外積的方式求此五邊形面積。

3. 若考慮下列化學反應式： $a\text{HCl} + b\text{CaCO}_3 \rightarrow c\text{CaCl}_2 + d\text{H}_2\text{CO}_3$ ，其中 a, b, c, d 須滿足化學式左右兩邊的 H 原子、C 原子、O 原子與 Cl 原子的總數一致。回答下列問題：

- (a) (10%) 根據上列化學式寫出係數 a, b, c, d 之間的相互關係。
 (b) (5%) 令欄向量 $\mathbf{x}=(a, b, c, d)^T$ ，則 \mathbf{x} 須滿足 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的線性聯立方程式，其中 $\mathbf{0}$ 為 4×1 的欄向量， \mathbf{A} 為 4×4 的方陣(Square matrix)。根據(a)所得的關係式，寫出係數矩陣 \mathbf{A} 。
 (c) (5%) 如何定義矩陣的秩(Rank)?
 (d) (5%) 計算(b)中方陣 \mathbf{A} 的秩。
 (e) (5%) 根據上列化學式求 \mathbf{x} 的最小整數解。

4. 若令 $f(x)$ 為一周期性函數，且 $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 。

- (a) (5%) 寫出傅立葉級數(Fourier series)的定義。
 (b) (10%) 若令 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的傅立葉級數，求 $F(x)$ 。
 (c) (5%) 根據(b)的傅立葉級數，求 $F(-\pi)$ ， $F(0)$ ， $F(1)$ ， $F(\pi)$ 及 $F(2\pi)$ 。
 (d) (5%) 解釋何謂傅立葉積分的「Gibbs phenomenon」。