

# 國立交通大學 102 學年度碩士班考試入學試題

科目：微積分與線性代數(4081)

考試日期：102 年 2 月 3 日 第 1 節

系所班別：統計學研究所 組別：統計所

第 / 頁, 共 / 頁

【不可使用計算機】\*作答前請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證之所組別與考科是否相符!!

1. 20% 請問下列級數為絕對收斂、條件收斂或發散。 (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{2n-1}\right)^{5n}$  (b)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)$   
 (c)  $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$  (d)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (3n+2)}$ .
  
2. 20% 在一場 100 公尺的比賽中，若甲乙兩人同時起跑且同時到達終點，請證明在比賽中一定有某一時間點兩人的速度相等。(假設兩跑者每一點之速度皆存在，但速度不一定連續)
  
3. 10% 請導出  $\frac{dy}{dx}$ , (a)  $y = (x^2 + 10)^{\cos x}$  (b)  $5xy - y^3 = x^5 + e^x$ 。
  
4. 20% 假設  $P$  為一  $4 \times 4$  之矩陣，其功能為將每一向量垂直投影到四維平面  $x + y + z + w = 0$  上。請找出  $P$  之四個固有值 (eigenvalues)，與其對應之固有向量(eigenvectors)。
  
5. 10% 假設  $A$  為  $n \times n$  之矩陣，使得  $\sum_{j=1}^n |A_{ij}| < 1$  對所有的  $i$  皆成立。證明  $I - A$  為可逆矩陣 (invertible)。
  
6. 20% 有一人流浪於 甲、乙、丙 三城市，假設每日傍晚，此人決定當晚前往其餘兩城市之任一城市之機率皆為  $1/2$ 。若此人第一夜住宿於甲城市，則第三夜亦住宿於甲城市之機率為何？而第 100 夜此人住宿於甲城市之機率為何；住宿於乙城市之機率為何？