

國立清華大學 102 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院碩士班丙組 (0506)

考試科目 (代碼)：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 \* 請在【答案卷】作答

1.(10%) 已知某一個定義域在實數的函數  $f(x)$  在  $0 < |x-2| < 1$  時滿足  $|f(x)-4| < 0.1$ 。下列關於  $f$  的敘述，那些是正確的？(複選，請說明正確或錯誤的原因)

- (A) 若  $|x-1.5| < 0.4$ ，則  $|f(x)-4| < 0.1$ 。
- (B)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ 。
- (C) 若  $0 < |x-2| < \frac{1}{2}$ ，則  $|f(x)-4| < \frac{1}{2}(0.1)$ 。
- (D) 若  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ ，則  $3.9 \leq L \leq 4.1$ 。
- (E) 若  $|x-2| < 1$ ，則  $|f(x)-4| < 0.2$ 。

2.(10%)(1) 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{\sin 2x}$$

(2) 求  $f'(c)$ ，已知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + \pi h) - f(c)}{h} = 1$$

3.(10%)(1) 求

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{x^2}{x^2 - 4} \right)^5 \right]$$

(2) 計算

$$\int_1^2 \frac{6x^2 + 2}{x^3 + x + 1} dx$$

4.(10%) 計算

$$\int (\ln x)^2 dx$$

5.(10%) 將  $x, y$  平面上由

$$y = x^2, \quad y = 2x$$

所包圍的區域繞  $y$  軸旋轉後所得到的物體其體積為何？

國立清華大學 102 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院碩士班丙組 (0506)

考試科目 (代碼)：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 \* 請在【答案卷】作答

6.(10 %)(1) 求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_1^x \ln t dt$$

(2) 計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

7.(10 %) (1) 寫出一個條件收斂 (conditional convergent) 的級數 (series)，驗證它是條件收斂的。

(2) 能否從級數  $\sum a_k$  是收斂的 (convergent)，推導出級數  $\sum a_k^2$  也是收斂的？(請說明原因)

8.(10 %)(1) 求函數  $f(x, y, z) = e^{-x} \sin(z + 2y)$  在  $(0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$  的梯度 (gradient)。

(2) 求函數  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  在  $(x, y) \neq (0, 0)$  指向原點的方向導數 (directional derivative)。

9.(10 %)(用變數變換) 計算

$$\iint_{\Omega} (2x - y)^2 dx dy,$$

其中  $\Omega$  是  $x + 2y = -1$ ,  $x + 2y = 1$ ,  $2x - y = 0$ ,  $2x - y = 3$  所圍成的平行四邊形。

10.(10 %)(1) 敘述格林定理 (Green's Theorem)。

(2) 應用格林定理計算

$$\oint_C e^x \cos y dx + e^x \sin y dy$$

其中  $C$  是以  $(0, 0), (1, 0), (1, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{\pi}{2})$  為端點的正方形。