

**第一部份 線性代數**

(請務必清楚表示求解過程)

1. 設  $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$  為兩相異資產的投資報酬率所組合的隨機向量，且資產間報酬率的相關性為  $Cov(X_1, X_2) = -2$ ，以及  $Var(X_1) = 5$ ， $Var(X_2) = 2$ ，試求兩組由此兩相異資產組成之投資組合，且此兩組投資組合之報酬率彼此不具有相關性。 15%

2. (A) 假設我們有三個資產，在現在及未來三個狀態的價格如下圖所示：

$$\begin{array}{l} \nearrow (1 \ 3 \ 2)^T \\ (1 \ 5 \ 3)^T \xrightarrow{t=0} (1 \ 4 \ 3)^T \\ \searrow (1 \ 8 \ 4)^T \\ t=1 \end{array}$$

試解出  $X = [x_{ij}]$  使得投資組合  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}$ ，在  $t=1$  時的價

格依序分別為  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。 15%

- (B) 承上題，假設有個選擇權在到期日  $t=1$  時，報酬函數與上述三個資產有關，表示為  $\max\left(\frac{(S_1 + S_2 + S_3)}{3} - 1, 0\right)$ ，其中  $S_1$ ， $S_2$ ，與  $S_3$  分別為上述三個資產在  $t=1$  時的價格。試求出此選擇權在  $t=0$  時的價格（複製成本）。 10%

3. 能不能做出一個矩陣  $A$ ，使得  $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  有解，且  $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。請解釋理由。

10%

**第二部份 微分方程**

(請務必清楚表示求解過程)

1. 求解  $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$ 。 25%

2. 請用級數解法解微分方程  $x^3 y' + y = 0$ 。 25%

試  
題  
隨  
卷  
繳  
回