國立中山大學113學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 113 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】 題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

1. [20%] Let
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 25 \\ -1 & -4 & -4 & -3 & -20 \\ -4 & -16 & -16 & -11 & -75 \end{bmatrix}.$$
Find a basis for each of the row space $\mathrm{Row}(A)$, the column space $\mathrm{Col}(A)$ and the kernel $\ker(A)$ of A. What are their dimensions?

2. [20%] Let $E_{i,j}$ be the 2×2 matrix whose i, j-entry is 1 while other entries are 0. Let $\mathbb{R}^{2\times2}$ be the space of all 2×2 real matrices and $\beta = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ its basis. Define a linear function $f : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ by $X \mapsto JXJ$, where J is the 2×2 all-ones matrix. Find the matrix representation $[f]_\beta^\beta$ of f with respect to the bases β and β. Then use it to find a basis of the kernel $\ker(f)$ of f.

3. [20%] For $p, q \geq 1$, let
$$A_{p,q} = \begin{bmatrix} O_{p,p} & J_{p,q} \\ J_{q,p} & O_{q,q} \end{bmatrix},$$
where $O_{m,n}$ and $J_{m,n}$ are the $m \times n$ zero matrix and all-ones matrix, respectively. Find $\det(A_{p,q} - xI)$.

4. [20%] Let $x = x(t)$ and $y = y(t)$ be functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Solve the system of differential equations
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$
Here $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ and $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ are the derivatives.

5. [20%] Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be an inner product defined on $\mathbb{R}^n$. Show that there is a basis β of $\mathbb{R}^n$ such that
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = [\mathbf{y}]_\beta^\top [\mathbf{x}]_\beta$$
for any $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, where $[\mathbf{v}]_\beta$ is the vector representation of $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ with respect to β.