

# 國立中山大學 113 學年度 碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

## — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

# 國立中山大學 113 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

題號：424001

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁 第 1 頁

答題時，每題都須寫下題號與步驟。請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. (10%) Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin^2(x))$
2. (20%) Evaluate the following integrals:
  - (a) (10%)  $\int \frac{x e^{3x}}{(3x+1)^2} dx$
  - (b) (10%)  $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+9}} dx$
3. (15%) Let  $F(x) = \int_0^x \ln(1 + \frac{t^2}{2}) dt$ . Find the Maclaurin series for  $F(x)$  and its radius of convergence.
4. (10%) Evaluate the following expressions:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x 1 dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x 1 dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 1 dy dx$$

5. (15%) Let  $V$  be the vector space of all polynomials  $p(t)$  of degree less or equal to 15.
  - (a) (10%) Show that the map  $T: V \rightarrow \mathbb{R}$  given by  $T(p(t)) = \int_0^1 p(t) dt$  is a linear transformation.
  - (b) (5%) Find the dimension of the kernel of  $T$ .
6. (15%) Let  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  and  $V = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ 
  - (a) (5%) Define  $T(x) = Ax$ , show that  $T: V \rightarrow V$ .
  - (b) (10%) Find the eigenvectors and eigenvalues of  $T$  acting on  $V$ .
7. (15%) Assume  $f(x)$  is a polynomial whose coefficients are integers, and we know that

$$\int_4^{\infty} \frac{f(x)}{(x+1)^2(4x^2+1)} dx = \ln \frac{20}{13} + \frac{1}{5}$$

- (a) (5%) Use the limit comparison test for improper integrals, what is the maximum degree of  $f(x)$ ?
- (b) (5%) Using the partial fraction method, we have  $\frac{f(x)}{(x+1)^2(4x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{4x^2+1}$ . Evaluate  $\int \frac{f(x)}{(x+1)^2(4x^2+1)} dx$  (Express the results in terms of  $A, B, C, D$  and  $x$ ).
- (c) (5%) According to (a) and (b), find the values of  $A, B, C, D$  and find  $f(x)$ .