國立中正大學

112學年度碩士班招生考試

試題

[第2節]

科目名稱	線性代數
系所組別	數學系

—作答注意事項—

※作答前請先核對「試題」、「試卷」與「准考證」之系所組別、科目名稱是否相符。

1. 預備鈴響時即可入場，但至考試開始鈴響前，不得翻閱試題，並不得書寫、畫記、作答。
2. 考試開始鈴響時，即可開始作答；考試結束鈴響畢，應即停止作答。
3. 入場後於考試開始40分鐘內不得離場。
4. 全部答題均須在試卷（答案卷）作答區內完成。
5. 試卷作答限用藍色或黑色筆（含鉛筆）書寫。
6. 試題須隨試卷繳還。

國立中正大學112學年度碩士班招生考試試題

科目名稱：線性代數　　　　本科目共1頁　第1頁

系所組別：數學系

(1) 每題20分 (2) 共 五 題(一頁) (3) 總分100分

1. (10+10pts) Let **A** be the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Using **REF** or **RREF**, find **(i)** a basis β_1 for the *row space* of **A**, and **(ii)** a basis β_2 for the *column space* of **A**.

2. (10+10pts) Let **B** be the matrix

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

It is known that the characteristic polynomial is given by $-\lambda^3 + \frac{9}{7}\lambda^2 - \frac{9}{7}\lambda + 1$.

(i) Let **W** be the solution space of the equation $x - y + z = 0$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Prove that the space **W** is *invariant* under the matrix transformation $\mathbf{T_B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, that is, $\mathbf{T_B}(\mathbf{W}) \subset \mathbf{W}$.

(ii) Let $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, where $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $v_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, be a basis for $\mathbb{R}^3$. Represent the transformation $\mathbf{T_B}$ as a matrix with respect to the basis β.

3. (20pts) Let $\mathbf{V} = C([0,1])$ be the space of all continuous real-valued functions defined on the interval $[0,1]$. Consider the space **V** with the inner product $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ for $f, g \in \mathbf{V}$. Let $f(x) = x^3 + x$ and $g(x) = 2x + 1$. Compute the *orthogonal projection* $\mathrm{proj}_g(f)$ of f onto g.

4. (20pts) Let **M** be the matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Find a *basis* to *diagonalize* the matrix **M**.

5. (10+10pts) Let **A** be the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(i) Use expansion about the third column to evaluate $\det(\mathbf{A})$.

(ii) Let **B** be the adjoint matrix of **A**. Find the entries $\mathbf{B}_{12}$ and $\mathbf{B}_{23}$.