

國立中山大學 112 學年度

碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張，亦不得使用應考證空白處作為計算紙使用)。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 112 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

題號：424004

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

There are total **100** points. Justify your answer appropriately to get a full mark for the question. Write down the question number for each question, and leave it blank if you are not able to answer the question.

1. (10 points) Define

$$f(x) = \begin{cases} 2023 & \text{if } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

where \mathbb{Q} is the set of all rational numbers. Show that f is nowhere continuous on \mathbb{R} .

2. (10 points) Suppose that $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real-valued functions that converge uniformly to f on \mathbb{R}^m . Show that if f_n are continuous, then f is a continuous function on \mathbb{R}^m .

3. (10 points) Consider the vector-valued function $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Show that F is not invertible but locally invertible everywhere on \mathbb{R}^2 .

4. (15 points) Let

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Show that F is not differentiable at $(0, 0)$, but all directional derivatives of F exist.

5. (15 points) Show that

$$S(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2023nxyz)}{n!}$$

defines a continuous function on \mathbb{R}^3 .

6. (20 points) State and prove the Weierstrass M-test.

7. (20 points) Let

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \in (0, 1]; \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Show that the graph of f is connected but not path connected on \mathbb{R}^2 .