

國立中山大學 111 學年度 碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 111 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

* When f is a polynomial, the notation f' stands for its derivative.

1. [20%] Let \mathcal{P}_2 be the vector space of all polynomials of degree at most 2 with real coefficients. Define the function $f : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ by $f(p) = p - xp' + p''$. Find a basis of $\text{range}(f)$.
2. [20%] Let $\mathcal{M}_{2,4}$ be the vector space of all 2×4 real matrices and O the 2×4 zero matrix. Let

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Show that

$$V = \{X \in \mathcal{M}_{2,4} : AX - XB = O\}$$

is a vector space and find a basis of V .

3. [20%] Let

$$A_x = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{bmatrix}$$

and $f(x) = \det(A_x)$. Find $f'(0)$.

4. [20%] Let A be an $n \times n$ complex matrix with distinct eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. For each $i = 1, \dots, q$, the eigenspaces of λ_i is $E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)$. Show that $\{E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_q}\}$ is linearly independent.
5. [20%] Show that every $n \times n$ complex matrix A has a decomposition $A = QTQ^*$ such that Q is a unitary matrix and T is an upper-triangular matrix, where Q^* is the conjugate transpose of Q .