國立中山大學111學年度
碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答(不得另攜帶紙張)。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學 111 學年度碩士班暨碩士在職專班招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】 題號：424005

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) 共1頁第1頁

計算與證明題：共6題，子題分數平均分配。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

[1]. (16%) Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Solve the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $\mathbf{x}$.

(b) Compute $\det(A)$.

[2]. (16%) Let $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ be defined by

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 - 4x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Find a matrix A such that $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) Let $\beta = ([1, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 1, 1])$ be an ordered basis of $\mathbb{R}^3$.
Find the matrix representation $B = [L]_\beta$ of L with respect to β.

[3]. (14%) Find the projection matrix onto the plane $2x - y - 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

[4]. (14%) Find a linear function that is the best least squares fit to the data

x	-2	-1	0	1
y	-1	1	2	2

[5]. (24%) Let $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$.

(a) Is A diagonalizable?

(b) Find the characteristic polynomial of A^{20}.

(c) Find the eigenvalues of A^{22}.

(d) Find the minimal polynomial of A.

(e) Find the minimal polynomial of A^{14}.

(f) Find the Jordan form of A.

[6]. (16%) Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ and $C = AB$. Show that

(a) If A and B both have linearly independent column vectors,
then the column vectors of C will be also linearly independent.

(b) The column space of C is a subspace of the column space of A.

========= 全卷完 =========