

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所
乙組

科目代碼：5101

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所乙組(0551)

考試科目（代碼）：微積分(5101)

共 1 頁，第 1 頁*請在【答案卷】作答

第一題填充部分，請將答案按照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。

第二~七題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

(a) Find $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (3^{1/n} + 3^{2/n} + \cdots + 3^{n/n})$. Ans: _____.

(b) Evaluate $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. Ans: _____.

(c) Evaluate $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \frac{xe^{2y}}{1-y} dy dx$. Ans: _____.

(d) Find the points on the hyperbola $x^2 - y^2 = 4$ that are closest to the point $(5, 0)$. Ans: _____.

(e) Find the solution of the initial-value problem: $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ and $y(0) = 0$. Ans: _____.

(f) Suppose that the equation $xy + xz^3 = 2yz$ defines z as a differentiable function of the two independent variables x and y . Find the value of $\partial z / \partial x$ at the point $(1, 1, 1)$. Ans: _____.

2. (8 pts) Suppose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. We call p a fixed point of f if $f(p) = p$. If f is differentiable and $f'(x) \neq 1$ for all $x \in \mathbb{R}$, show that f has at most one fixed point.

3. (8 pts) Suppose that (1) $f(x_0) = g(x_0) = 0$, (2) $f'(x_0)$ and $g'(x_0)$ exist, and (3) $g'(x_0) \neq 0$. Show that

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

4. (10 pts) Let

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cos(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

Investigate the continuity and differentiability of f at $x = 0$.

5. (10 pts) For all the values of x for which the series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n(\ln n)^2}$$

converges.

6. (10 pts) Let $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x, y, z) = xy + z^2.$$

Find the absolute maximum and minimum values of f on the unit ball $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

7. (12 pts) Let $A(t)$ be the area of the region in the first quadrant enclosed by the coordinate axes, the curve $y = e^{-x}$, and the line $x = t > 0$. Let $V(t)$ be the volume of the solid generated by revolving the region about the x -axis. Find the following limits.

(a) $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$.

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) / A(t)$.

(c) $\lim_{t \rightarrow 0^+} V(t) / A(t)$.