

國立高雄大學 114 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

作答時，請於答案卷上註明題號，計算題須附上過程或說明。

1. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本， $Y_1, \dots, Y_m$ 為一組由 $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本，且兩組隨機樣本假設為獨立。再者， $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $\bar{Y} = \sum_{i=1}^m Y_i/m$, $S_1^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$, $S_2^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2/(m-1)$ 。試證
 - (i) (15%) 試推導 $(\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2))/\sqrt{\sigma^2(1/n + 1/m)}$ 有 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈；
 - (ii) (15%) 試推導 $((n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2)/\sigma^2$ 有 χ_{n+m-2}^2 分佈；
2. (20%) 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 p.d.f. $f(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0,1$, $0 \leq p \leq 1/2$, 所產生之隨機樣本。試分別求 p 之動差估計量及最大概似估計量(Maximum Likelihood Estimate, MLE)。
3. (10%) 假設某零件之壽命有 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈, $\lambda > 0$ 。現假設試驗共有 n 個零件，經過時間 T 後試驗被中斷，中斷時有些零件仍在運轉。因此獲得壽命 $X_1, \dots, X_m$ ，對其餘的 $n-m$ 個零件，則只知 $X_{m+1} > M, \dots, X_n > M$ 。試求 λ 之最大概似估計量。
4. 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{U}(\theta-1, \theta+1)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta \in \mathbb{R}$ 。
 - (i) (15%) 試證 $T_1 = \bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $T_2 = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ 皆為 θ 之不偏估計量，其中 $X_{(1)}$, $X_{(n)}$ 分別為最小及最大順序統計量。
 - (ii) (10%) 試求 T_1 之均方差(Mean Squared Error, MSE)。
5. (15%) 設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組由 $\mathcal{N}(\theta, \alpha\theta^2)$ 分佈所產生之隨機樣本，其中 α 為一已知常數, $\theta > 0$ 。試證 $T = (\bar{X}, S_n^2)$ 為 θ 之一充分統計量，但並無完備性，其中 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ 。