

國立嘉義大學 114 學年度
應用數學系碩士班(乙組)招生考試試題

科目：機率統計（共 100 分）

一、 機率部分：

1. 假設連續型隨機變數 $X_1 \sim U(0,1)$ 且 $X_2|x_1 \sim U(0, x_1)$ ，
 - i. (2 分) 試求 X_1 與 X_2 的聯合機率密度函數。
 - ii. (5 分) 請計算 $E(X_1 X_2)$ 。
 - iii. (10 分) 令 $W_1 = \frac{X_2}{X_1}$ & $W_2 = X_2$ ，試求 W_1 與 W_2 的聯合機率密度函數。
 - iv. (3 分) W_1 與 W_2 是否獨立？請說明原因。
2. (10 分) 假設連續型隨機變數 X 且服從以下機率密度函數：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

試求 $Y = X^2 + 2X + 1$ 之機率密度函數。

3. 假設連續型隨機變數 X 服從以下機率密度函數：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- i. (5 分) 試求 $X|X > 2$ 的條件機率密度函數。
 - ii. (2 分) 試求條件期望值 $E[X|X > 2]$ 。
 - iii. (3 分) 試求條件變異數 $\text{Var}[X|X > 2]$ 。
4. (10 分) 假設 $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ 且 $\mu \in \mathbb{R}$ & $\sigma^2 \in (0, \infty)$ 。令

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

試證 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$ 當 $n \rightarrow \infty$ 。

二、統計部分：

5. (10 分) Suppose $X_1, X_2, \dots, X_n$ are i.i.d. random variables following the exponential distribution with PDF

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0.$$

Find the MLE of λ .

6. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be i.i.d. random variables from a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$ where μ is unknown and σ^2 is known.

(a) (10 分) Find an unbiased estimator for μ .

(b) (10 分) Show that your estimator is the UMVUE for μ .

7. A researcher wants to test if the mean weight of a population of oranges is 150 grams. A random sample of $n = 10$ oranges is collected, with the sample mean weight $\bar{X} = 145$ grams and sample standard deviation $s = 10$ grams.

(a) (10 分) State the null and alternative hypotheses for a one-sample t -test.

(b) (10 分) Conduct the t -test at a significance level of $\alpha=0.05$. Include the calculation of the test statistic and the decision rule.