

國立中山大學 114 學年度 碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請斟酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 114 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：高等微積分【應數系碩士班丙組】

題號：424004

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

All variables are real numbers. n denotes natural numbers.

1. (15%) Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be Riemann integrable. Show that f^2 is also Riemann integrable.

2. (15%) Does $\int_1^\infty e^{-x} \sin(x^2) dx$ exist? Show your reason.

3. (15%) (a) What is the definition of a Cauchy sequence?

(b) Show that every Cauchy sequence in $\mathbb{R}$ converges.

4. (i) (10%) Let $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Show that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

(ii) (10%) Show that $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

5. (15%) Let X be a metric space. Show that every compact set in X is closed and bounded.

6. (10%) Suppose that $\sum_{n=1}^\infty x_n^2$ and $\sum_{n=1}^\infty y_n^2$ are convergent series. Show that $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ also converges.

7. (10%) Let $f(x, y) = (x^2 + y, x - y)$. Is f invertible around $(2, 0)$? State your reason.