

國立中山大學 114 學年度 碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- 考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- 答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 114 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數丙【應數系碩士班丙組】

題號：424003

※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

共 1 頁第 1 頁

1. [20%] Let A be a $p \times q$ matrix and B a $q \times r$ matrix. Show that

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

2. [20%] Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Let $\mathcal{M}_2$ be the vector space of 2×3 real matrices and

$$V = \{X \in \mathcal{M}_{2 \times 3} : AX = XB\}.$$

Show that V is a subspace of $\mathcal{M}_{2 \times 3}$ and find a basis of V .

3. [20%] Let $\mathcal{P}_2$ be the vector space of all polynomials of degree at most 2 with real coefficients. Define a map $f : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ by $f(p(x)) = (p(1), p(2), p(3))^T$. Show that f is a linear function and find its matrix representation $[f]_{\alpha}^{\beta}$, where $\alpha = \{1, x, x^2\}$ and β is the standard basis of $\mathbb{R}^3$.

4. [20%] Let

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Find an orthogonal matrix Q such that $D = Q^T L Q$ is a diagonal matrix.

5. [20%] Let A and B be $n \times n$ diagonalizable matrices such that $AB = BA$. Show that A and B are simultaneously diagonalizable.