國立中山大學114學年度
碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，後果由考生自負。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶書籍、紙張（應考證不得做計算紙書寫）、具有通訊、記憶、傳輸或收發等功能之相關電子產品或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材入場。
- 試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。
- 試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。
- 違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。

國立中山大學 114 學年度碩士班考試入學招生考試試題

科目名稱：線性代數乙【應數系碩士班乙組】
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題)

題號：424002
共 1 頁第 1 頁

1. (25 pts)

   (a) (8 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$. Show that $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$.

   (b) (5 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ and $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Show that AB is not invertible.

   (c) (12 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Show that A is invertible if and only if $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$ for all $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$.

2. (20 pts) Let $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfy $a_{ij} > 0$ $(\forall 1 \leq i, j \leq n)$ and $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(\forall 1 \leq i \leq n)$.

   (a) (8 pts) Show that 1 is an eigenvalue of A.

   (b) (12 pts) Let $n = 2$ and m denote a positive integer. Find $\lim_{m\to\infty} A^m$.

3. (25 pts)

   (a) (10 pts) Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be invertible and let $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be given arbitrarily. Show that the characteristic polynomials of B and ABA^{-1} are the same.

   (b) (15 pts) Let $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Show that the characteristic polynomials of PQ and QP are the same.

4. (15 pts) Let $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfy $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, if } i \neq j \\ b & \text{, if } i = j \end{cases}$.

   (a) (5 pts) Evaluate $\det A$.

   (b) (10 pts) Let $n \geq 3$ and $W = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Ax = 0\}$. Find b such that $\dim W = 1$ and find a basis of W in this case.

5. (15 pts) Let $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

   (a) (6 pts) Use the definition of linearly independent to show that $\{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly independent.

   (b) (9 pts) Derive an orthonormal basis of $\mathbb{R}^{3\times 1}$ from v_1, v_2, v_3 by Gram-Schmidt process.