

國立高雄師範大學 113 學年度碩士班招生考試試題

系所別：數學系

科目：基礎數學（全一頁）

※注意：1.作答時請將試題題號及答案依序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。

2.答案卷限用藍、黑色筆作答，以其他顏色作答之部分，該題不予計分。

3.本試卷共 8 題，前 4 題為微積分題佔 50%，後 4 題為線性代數佔 50%。

1. 請求出以下極限值。 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\ln x}$ (10%)

2. 請求出以下積分。 $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin y \, dy \, dx$ (10%)

3. 證明方程式 $(x-1)^2 e^x = 1$ 有恰好三個實根。 (15%)

4. 寫出函數 $f(x) = (1+x)\ln(1+x^2)$ 在 $x=0$ 的泰勒展開式及其收斂的範圍。(15%)

5. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ 且 $\text{rank}(A) = 3$ ，試求 λ 之值。 (10%)

6. 設 $A \in R^{3 \times 3}$ 且 $b \in R^3$ 。考慮非齊次(nonhomogeneous) 方程組 $Ax = b$ ，若 $\text{rank}(A) = 2$ 且方程組的三個解向量 x_1, x_2, x_3 滿足 $x_1 + x_2 = (3, 1, -1)^T$, $x_1 + x_3 = (2, 0, -2)^T$ ，試求 $Ax = b$ 的通解 (general solution)。 (10%)

7. 設 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, \\ b_n = 4a_{n-1} + 3b_{n-1}, \end{cases}$ 且 $a_0 = 3, b_0 = 2$ ，試求 $2a_{100} - b_{100}$ 之值。 (15%)

8. 在 R^3 中，試求向量 x ，使得 x 在下列兩組基底 (basis)

$$\alpha = \{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$$

$$\beta = \{(2, 1, -1)^T, (0, 3, 1)^T, (1, 3, 1)^T\}$$

下有相同的座標表示。 (15%)