

國立高雄大學 109 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

一. 是非題：每題五分，共二十五分。

1. 若一函數於某點可導(differentiable)，則該函數於該點連續(continuous)，反之亦成立。
2. 若一函數於某點為 n 次可導，則此函數必可在該點泰勒展開至 $(n + 1)$ 階。
3. 考慮一個一元函數 $f(x)$ ，若此函數於某點為可導函數，則此函數於該點必定可微。
4. 若一數列(sequences)有上界(upper bounded)，則此數列被稱為有界數列(bounded sequences)。
5. 若一級數 $\sum a_n$ 發散，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在。

二. 選擇題(可複選，全對方給分)：每題五分，共二十五分。

6. 下列敘述何者錯誤：

(A) 若二維空間中，一區域 D 面積為 0，則 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ 。

(B) 若 $D = D_1 \cup D_2$ ，則 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$ 。

(C) 對任意區域 D ， $\left| \iint_D f(x, y) + g(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy + \iint_D |g(x, y)| dx dy$ 。

(D) 若 $D = \{(x, y) : -1 \leq x < 0, -1 \leq y < 0\}$ ，則 $\iint_D 1 dx dy < 0$ 。

7. 下列何者為奇函數(odd function)：(A) $\sin(x)$ (B) x^3 (C) 0 (D) $(\sin x)^2$

8. 下列敘述何者正確：

(A) 若函數 $f(x)$ 為奇函數，則 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ 。

國立高雄大學 109 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

(B) 若函數 $g(x)$ 為偶函數(even function)，則 $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2 \int_0^{\pi} g(x)dx$ 。

(C) 承(A)、(B)，則 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0$ 。

(D) 承(A)，若 $f(x)$ 為一可導函數，則其導數亦為奇函數。

9. 下列有關數列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 之敘述，何者為非：

(A) 若 $d \in R$ 為一實數，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = d$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d$ 。

(B) 若 $|b_n| \leq c_n$ ，且 $c_n \rightarrow 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 。

(C) 已知函數 $\sin(x\pi)$ ，若 $x \rightarrow \infty$ 其極限不存在，則數列 $\sin(n\pi)$ 亦不收斂。

(D) 已知函數 $\sin(\pi/x)$ ，若 $x \rightarrow \infty$ 其極限存在(收斂至 0)，則數列 $\sin(\pi/n)$ 亦收斂。

10. 下列何級數發散： (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n+1}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n+3}{e^{n+4}}$

三. 計算題：每題十分，共五十分。

11. 考慮一函數 $f(x)$ ，試寫 $f(x)$ 為可導函數(differentiable function)之定義，與其導數(derivative)之定義。

12. 若一實數函數 $f(x)$ 於 $x \in R$ 上為無窮可導函數，試寫出其於某點 $a \in R$ 上之泰勒級數(Taylor series)。

13. 假設 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ，試證 $f(x, y)$ 在點 $(0,0)$ 處偏導數(partial derivative)

存在，但不可微(differential does not exist)。

國立高雄大學 109 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

14. 試利用 $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2}$ ，求 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx$ 之值。

15. 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \{\sin(x) + y^3 + 3\} dx dy$ 之值。