國立高雄大學 109 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

1. (5%) 設一隨機變數X來自於二項分佈，亦即X有$\mathcal{B}(4,\theta)$分佈。試求$E(\sin(\pi X/2))$。

2. 設$Y|P$有$\mathcal{B}(n,P)$分佈且P的機率密度函數為$f(p)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$, $\alpha,\beta>0$, $0<p<1$。
   (a) (10%) 試證Y之非條件分佈為$P(Y=y)=\binom{n}{y}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\dfrac{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}$, $y=0,1,\cdots,n$。
   (b) (10%) 試求Y之期望值及變異數。

3. 設$X_1,\cdots,X_n$為一組由參數為λ之指數分佈所產生之隨機樣本，且其機率密度函數以$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$, $\lambda>0$表之。
   (a) (10%) 試證 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 為λ的完備充分統計量。
   (b) (10%) 試證 $2\lambda S$ 來自具自由度為 2*n* 的卡方分佈。
   (c) (10%) 試求 $P(X\geq a)$ 之最大概似估計值(Maximum Likelihood Estimator, MLE)。
   (d) (10%) 試給一α下之 H_0: $\lambda=\lambda_0$, vs. H_a: $\lambda\neq\lambda_0$ 的概似比檢定(Likelihood Ratio Test, LRT)。

4. (10%) 假設某廠牌燈管壽命的機率密度函數為$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$, $\lambda>0$, 且其期望值為 10,000 小時。某公司近期安裝 50 支該廠牌的燈管，試求至少有一燈管 30,000 小時後仍可使用之機率。

5. (5%) 設$X_1,\cdots,X_n$為一組來自參數為θ的波松分佈所產生之隨機變數，$\theta>0$。試給出θ之兩種動差估計量。

6. 設$X_1,\cdots,X_{n_1}$及$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$分別為由$\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$及$\mathcal{N}(\mu_y,\sigma_y^2)$分佈所產生之隨機樣本，其中$\mu_x$, μ_y, σ_x^2, σ_y^2皆為未知。
   (a) (10%) 設$\sigma_x^2=\sigma_y^2$, 試給一α下H_0: $\mu_x-\mu_y=0$, vs. H_a: $\mu_x-\mu_y\neq 0$之檢定。
   (b) (10%) 試給出一 σ_x^2/σ_y^2 的$(1-\alpha)$信賴區間。