

## 科目：數學(以離散數學、線性代數為主)

編號：343

適用：資工系

考生注意：

1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分。
3. 限用藍、黑色筆作答；試題須隨卷繳回。

本試題  
共 3 頁  
第 1 頁

## 一、是非題(10%)

每小題答對得 2 分，不作答得 0 分，答錯倒扣 2 分，倒扣至是非題總分 0 分為止。

請以 T 表示「是」，F 表示「非」，僅寫 T 或 F 即可，不需要解釋原因。

1. (2%) 買十送一與打九折，對於每樣物品平均的付出是相同的。
2. (2%) 數字 1 不是質數(prime)
3. (2%) 在任意給定的平面圖(planar graph)之頂點(vertex)著色，若每個頂點僅著 1 種顏色，一共只要有 4 種顏色，就可以讓相鄰的兩個頂點所著的顏色不同。
4. (2%) 令 A 與 B 為兩機率事件，且  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ 。則可知  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 。
5. (2%) 從 1 至 20 的整數中(包含首尾)，任意取出 10 個數字，其中一定存在兩個數字具有整數倍數的關係。

## 二、計算證明題(40%)

請詳細列出推導或是證明過程方能得分

1. (10%) 請計算 100 以內質數(prime)之總個數。
2. (10%) 假設某次考試共有 5 題是非題，每題答對得 2 分，不答得 0 分，答錯倒扣 2 分，倒扣至 0 分為止。請問這樣的題目，得分的期望值(expectation)是多少？
3. (10%) 對於任意自然數  $n$ ，證明  $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  一定是整數。
4. (10%) 令  $F_0 = 0$ 、 $F_1 = 1$ ，且對於整數  $n \geq 0$ ， $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 。

證明  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ ，其中整數  $n \geq 0$ 。

## 科目：數學(以離散數學、線性代數為主)

編號：343

適用：資工系

考生注意：

1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分。
3. 限用藍、黑色筆作答；試題須隨卷繳回。

本試題  
共 3 頁  
第 2 頁

5. (35%)

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 及 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- (a) (5%) 求矩陣  $A$  的行列式值(determinant)。
- (b) (5%) 求矩陣  $A$  的列空間(row space)的維度(dimension)及一組規範正交基底(orthonormal basis)。
- (c) (5%) 求矩陣  $A$  的核空間(null space)的維度及一組規範正交基底。也就是求以

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ \text{下之線性方程系統 } x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

- (d) (5%) 解釋為什麼核空間上的每一個向量均與列空間上的每一個向量保持垂直，也就是彼此兩向量內積等於 0。
- (e) (10%) 令  $L$  為一線性轉換， $L: R^3 \rightarrow R^3$ ，如下：對於歐式空間(Euclidean space) $R^3$  上的任一點向量  $\mathbf{x}$ ，對應至在  $A$  的列空間上的正交投影(orthogonal projection)向量。找出此線性轉換之  $3 \times 3$  代表矩陣  $P$ ，使得  $L(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ 。提示：利用(b)的結果。
- (f) (5%) 找出  $R^3$  上所有的點向量，其在  $A$  的列空間上的正交投影均等於向量  $(0, 0, 0)$ 。

試  
題

科目：數學(以離散數學、線性代數為主)

考生注意：

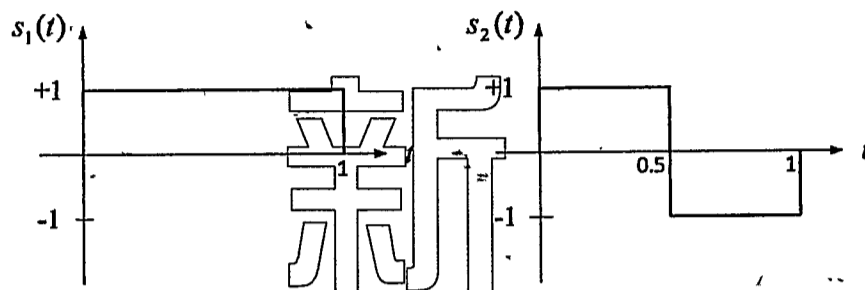
1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分。
3. 限用藍、黑色筆作答；試題須隨卷繳回。

本試題  
共 3 頁  
第 3 頁

編號：343

適用：資工系

6. (15%) 令  $s_1(t)$  及  $s_2(t)$  為兩個實數值函數，如圖一所示。



圖一、 $s_1(t)$  及  $s_2(t)$ ，其中  $0 \leq t \leq 1$ 。

- (a) (5%) 令  $S = \{s_1(t), s_2(t)\}$ ，證明集合  $S$  是線性獨立(linear independent)。
- (b) (5%) 令  $V$  為由函數  $s_1(t)$  及  $s_2(t)$  所拓展(span)出一個向量空間。向量空間  $V$  上的內積(inner product)定義如下： $\langle p(t), q(t) \rangle \triangleq \int_0^1 p(t)q(t)dt$ ，其中函數  $p(t)$  及  $q(t) \in V$ ；及函數  $p(t)$  的長度(length; norm)定義如下： $\|p(t)\| \triangleq \sqrt{\langle p(t), p(t) \rangle}$ 。說明  $\{s_1(t), s_2(t)\}$  為函數向量空間  $V$  的一組規範正交基底。
- (c) (5%) 令  $r(t) = 2s_1(t) + 3s_2(t)$ ，畫出函數  $r(t)$  及求  $\langle r(t), s_2(t) \rangle$ 。

試

題