# 國立中山大學109學年度
# 碩士暨碩士專班招生考試試題

**科目名稱：工程數學甲【電機系碩士班電波聯合碩士班選考、電機系碩士班甲組、通訊所碩士班乙組選考、電機系碩士班戊組選考、己組】**

－作答注意事項－

考試時間：100分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以2B鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用2B鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

# 國立中山大學109學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：工程數學甲【電機系碩士班電波聯合碩士班選考、電機系碩士班甲組、通訊所碩士班乙組選考、電機系碩士班戊組選考、己組】題號：431002

※本科目依簡章規定「可以」使用計算機（廠牌、功能不拘）（混合題） 共4頁第1頁

**下面1-10題為是非題，總分20分。每題答對2分，答錯扣3分，未作答者以0分計。總分低於0分者以0分計。**

1. 微分方程式 $\ddot{y}(t)+3t^2\dot{y}(t)+|t|y(t)=0$ 為非線性方程式。
   (A) 是 (B) 否
2. 微分方程式 $\ddot{x}(t)+(1+x(t)^2)\dot{x}(t)+(1-x(t)^2)x(t)=0$ 有三個平衡點。
   (A) 是 (B) 否
3. 微分方程式 $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)-y(t)=0$ 的解，不管初值為何，都會收斂到0。
   (A) 是 (B) 否
4. 拉普拉斯轉換（Laplace transform）為線性轉換。
   (A) 是 (B) 否
5. 令函數 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換為 $Y(s)$。則 函數 $\ddot{y}(t)$ 的拉普拉斯轉換為 $s^2Y(s)$。
   (A) 是 (B) 否
6. 函數 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\ t\in[0,\infty)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform）為 $\frac{1}{(1-\omega^2)(1+j\omega)}$。
   (A) 是 (B) 否
7. 複函數 $f(z)=(z+1)/z$ 在原點之外的所有複平面上皆為解析（analytic）。
   (A) 是 (B) 否
8. 複函數 $f(z)=\sin z$ 之絕對值會隨著 $z$ 的虛部增大而發散。
   (A) 是 (B) 否
9. 定義 Del 操作子為 $\nabla:=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$。若$\varphi$為具有連續一二偏階導函數的連續純量場函數，則$\nabla\times(\nabla\varphi)\neq 0$，除非$\varphi$是常數函數或線性函數。
   (A) 是 (B) 否
10. 承上題，$\nabla\varphi$ 在 $\varphi$ 之定義域上的任何封閉路徑積分皆為0。
    (A) 是 (B) 否

**下面11-15題為單選題，每題4分，答錯或未作答者該題以0分計。11-15題總共20分。**

考慮微分方程式 $\ddot{z}(t)+b\dot{z}(t)+\sin(z(t))=u(t)$ ，並回答以下第11至15題。

11. 假設 $u(t)\equiv 0,\ \forall t$。下列哪一組初值 $(\dot{z}(0),z(0))$ 所對應的解不是 $z(t)\equiv 0,\ \forall t$。
    (A) $(0,0)$ (B) $(\pi,0)$ (C) $(0,\pi)$ (D) $(0,-\pi)$
12. 假設 $u(t)\equiv 0,\ \forall t$。將前述方程式就 $(\dot{z}(0),z(0))=(0,0)$ 線性化後之線性方程式，滿足以下哪個敘述?
    (A) 若 $b=0$ ，則任何初值對應的解皆會收斂到0。
    (B) 若 $b=0$ ，則有些初值對應的解皆會發散。
    (C) 若 $b=1$ ，則任何初值對應的解皆會收斂到0。
    (D) 若 $b=-1$ ，則有些初值對應的解皆會收斂到0。

13. 假設 $u(t) \equiv 0,\ \forall t$。將前述方程式就 $(\dot{z}(0), z(0)) = (0, \pi)$ 線性化後之線性方程式，滿足以下哪個敘述?

(A) 若 $b = 0$，則有些初值對應的解皆會收斂到 0。
(B) 若 $b = 0$，則任何初值對應的解皆會收斂到 0。
(C) 若 $b = 1$，則任何初值對應的解皆會收斂到 0。
(D) 若 $b = 1$，則任何初值對應的解皆會發散。

14. 考慮將前述方程式就 $(\dot{z}(0), z(0)) = (0, 0)$ 線性化後之線性方程式。假設 $b = 0$，且該方程式之輸入項（forcing term）為單位步階函數。下列敘述何者為正確?

(A) 該線性方程式的解會收斂到 1。
(B) 如該線性方程式的初值為 $(1, 0)$，則方程式的解為 $\sin t$。
(C) 該線性方程式的解會發散
(D) 該線性方程式的解會不斷震盪。

15. 考慮將前述方程式就 $(\dot{z}(0), z(0)) = (0, 0)$ 線性化後之線性方程式。假設 $b = 2$，且該方程式之輸入項（forcing term）為 $\sin t$。下列敘述何者為正確?

(A) 該線性方程式的解會收斂到 $-\frac{1}{2}\cos t$。
(B) 該線性方程式的解會收斂到 $\sin t$。
(C) 如該線性方程式的初值為 $(0, 0)$，則方程式的解為 $\sin t$。
(D) 如該線性方程式的初值為 $(0, 1)$，則方程式的解為 $\cos t$。

**下面 16-23 題為複選題，每題 5 分，總分 40 分。每錯一個選項扣 2 分，得分低於零分或未作答者，該題以零分計。**

16. 令 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + ay^2z)\mathbf{i} + (bx - z + 2xyz)\mathbf{j} + (cy + xy^2)\mathbf{k}$。下敘述何者正確?

(A) 有超過一組的 $(a, b, c)$ 值能讓 $\mathbf{F}$ 成為一個保守的向量場。
(B) 只有一組 $(a, b, c)$ 值能讓 $\mathbf{F}$ 成為一個保守的向量場。
(C) $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ 會讓 $\mathbf{F}$ 成為一個保守的向量場。
(D) $(a, b, c) = (0, 1, -1)$ 會讓 $\mathbf{F}$ 成為一個保守的向量場。
(E) $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ 會讓 $\mathbf{F}$ 成為一個保守的向量場。

17. 令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。下列關於 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ 之敘述何者正確?

(A) 該矩陣是一個 $3 \times 3$ 的方陣。
(B) 該矩陣在 $t \geq 0$ 時，永為一個可逆矩陣。
(C) 該矩陣 $(3, 2)$ 位置那一項為 $\mathrm{e}^t$。
(D) 該矩陣 $(1, 2)$ 位置那一項為 $t\mathrm{e}^{-t}$。
(E) 當 $t \to \infty$ 時，該矩陣收斂為 0 矩陣。

18. Consider the linear equation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, where $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] \in \mathbb{R}^{3\times4}$ and $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ are column vectors of $\mathbf{A}$. Suppose $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$. Which of the following statements are true?
    (A) The linear equation has exactly one solution.
    (B) The linear equation has infinitely many solutions.
    (C) No conclusion can be drawn about the number of solutions to the linear equation.
    (D) The vectors $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ are linearly dependent.
    (E) $\text{rank}([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = \text{rank}(\mathbf{A})$

19. Consider the linear equation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ with $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Which of the following statements are true?
    (A) If $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, then there exists at least one solution.
    (B) If $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, then there exists exactly one solution.
    (C) If $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, then the column vectors of $\mathbf{A}$ are linearly independent.
    (D) If $n > m$, then there exists at least one solution.
    (E) If $m > n$, then there exists at most one solution.

20. Consider the linear mapping $L: V \to W$. Let $\mathbf{0}_V$ and $\mathbf{0}_W$ be the zero vectors in $V$ and $W$, respectively. Which of the following statements are true?
    (A) The condition $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ implies $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
    (B) For any $\mathbf{w} \in W$, there exists $\mathbf{v} \in V$ such that $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
    (C) If $L$ is one-to-one, then $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ implies $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
    (D) If $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ are linearly independent, $L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \cdots, L(\mathbf{v}_k)$ are also linearly independent.
    (E) The condition $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}_V$ implies $c_1L(\mathbf{v}_1) + c_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_kL(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_W$.

21. Given vectors $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ in $\mathbb{R}^n$ and matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Which of the following statements are true?
    (A) If $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ and $\mathbf{y}^T\mathbf{z} = 0$, then $\mathbf{x}^T\mathbf{z} = 0$.
    (B) $\text{rank}(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \text{rank}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = 1$
    (C) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$
    (D) If $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ and $\mathbf{C}$ is not the zero matrix, then $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
    (E) If $\mathbf{AB}$ equals the zero matrix, then $\mathbf{BA}$ also equals the zero matrix.

22. Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\text{R}(\mathbf{A})$ denote the column space of $\mathbf{A}$, $\text{N}(\mathbf{A})$ denote the null space of $\mathbf{A}$, and $\dim(S)$ denote the dimension of a subspace $S$. Which of the following statements are true?
    (A) For any $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, there exists $\mathbf{u} \in \text{R}(\mathbf{A}^T)$ and $\mathbf{v} \in \text{N}(\mathbf{A})$ such that $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.
    (B) Suppose $\mathbf{u} \in \text{R}(\mathbf{A})$ and $\mathbf{v} \in \text{N}(\mathbf{A}^T)$. Then $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$.
    (C) $\dim\big(\text{R}(\mathbf{A})\big) + \dim\big(\text{N}(\mathbf{A}^T)\big) = n$
    (D) For any $\mathbf{y} \in \text{R}(\mathbf{A})$, there exists $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ such that $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}$.
    (E) If $\mathbf{y} \in \text{N}(\mathbf{A}^T) \cap \text{R}(\mathbf{A})$, then $\mathbf{y}$ is the zero vector in $\mathbb{R}^m$.

23. Let $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Which of the following statements are true?
    (A) If $\mathbf{A}$ is singular, then 0 is an eigenvalue of $\mathbf{A}$.
    (B) $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}^T$ share the same eigenvalues and eigenvectors.
    (C) If $\mathbf{A}$ is diagonalizable, then $\mathbf{A}$ has $n$ distinct eigenvalues.
    (D) Suppose that $\mathbf{A}$ is nonsingular. The condition $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ implies $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$.
    (E) Suppose that all the eigenvalues of $\mathbf{A}$ are real and positive. Then we have $\det(\mathbf{A}) > 0$.

科目名稱：工程數學甲【電機系碩士班電波聯合碩士班選考、電機系碩士班甲組、通訊所碩士班乙組選考、電機系碩士班戊組選考、己組】題號：431002

※本科目依簡章規定「可以」使用計算機（廠牌、功能不拘）（混合題） 

以下第24題到第25題需要簡明寫出計算過程，答案正確但沒有計算過程，將酌扣分數或不給分。第24題到第25題中 $z = x + jy$ 代表複數，其中 $x, y$ 是實數而 $j = \sqrt{-1}$。

24. (10%)

(a) (5%) Let $\Gamma$ be the circle $\left|z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}}$, oriented positively. Evaluate the integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz$$

(b) (5%) Evaluate the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

25. (10%)

(a) (5%) Define

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 6z^2 + 1}$$

Let $z_k$ be a pole of $f(z)$. If $z_k$ is inside the unit circle $|z| = 1$, compute the residue of $f(z)$ at $z_k$.

(b) (5%) Evaluate the integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta$$