國立中山大學 109 學年度
碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

- **考試開始鈴響前不得翻閱試題，並不得書寫、劃記、作答。**請先檢查答案卷（卡）之應考證號碼、桌角號碼、應試科目是否正確，如有不同立即請監試人員處理。
- **答案卷限用藍、黑色筆(含鉛筆)書寫、繪圖或標示**，可攜帶橡皮擦、無色透明無文字墊板、尺規、修正液（帶）、手錶(未附計算器者)。每人每節限使用一份答案卷，不得另攜帶紙張，請衡酌作答。
- 答案卡請以 2B 鉛筆劃記，不可使用修正液（帶）塗改，未使用 2B 鉛筆、劃記太輕或污損致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果由考生自行負擔。
- 答案卷（卡）應保持清潔完整，不得折疊、破壞或塗改應考證號碼及條碼，亦不得書寫考生姓名、應考證號碼或與答案無關之任何文字或符號。
- 可否使用計算機請依試題資訊內標註為準，如「可以」使用，廠牌、功能不拘，唯不得攜帶具有通訊、記憶或收發等功能或其他有礙試場安寧、考試公平之各類器材、物品（如鬧鈴、行動電話、電子字典等）入場。
- **試題及答案卷（卡）請務必繳回，未繳回者該科成績以零分計算。**
- **試題採雙面列印，考生應注意試題頁數確實作答。**
- **違規者依本校招生考試試場規則及違規處理辦法處理。**

國立中山大學109學年度碩士暨碩士專班招生考試試題

科目名稱：基礎數學【應數系碩士班甲組】 **題號：424001**

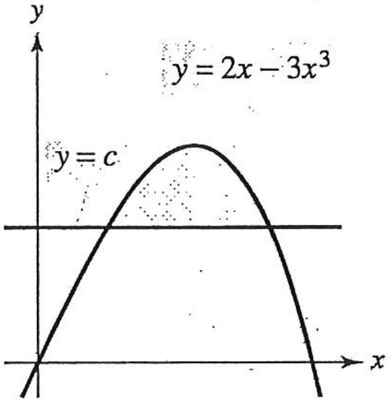
※本科目依簡章規定「不可以」使用計算機(問答申論題) **共2頁第1頁**

共十題，每題 10 分。答題時，每題都必須寫下題號與詳細步驟。

請依題號順序作答，不會作答題目請寫下題號並留空白。

1. (a) (5%) Use an approximate Riemann sum to evaluate the limit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
   (b) (5%) Evaluate the limit $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{2+\sqrt{2+t}}\,dt$.

2. The horizontal line $y=c$ intersects the curve $y=2x-3x^3$ in the first quadrant as shown in the figure. Find c so that the areas of the two shaded regions are equal.



3. Find the indefinite $\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx$.

4. Determine whether the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$ converges conditionally or absolutely, or diverges.

5. Use Lagrange multipliers to find any extrema of the function $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ subject to the constraint $x^2+y^2\le 1$.

6. Find the area of the surface given by $z=f(x,y)=7+2x+2y$ over the region $R=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$.

7. Let A be a 2×2 matrix with eigenvalues 3 and $1/3$ and corresponding eigenvectors $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Let $\{\mathbf{x}_k\}$ be a solution of the difference equation $\mathbf{x}_{k+1}=A\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}9\\1\end{bmatrix}$.

   (a) (5%) Compute $\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_0$.

   (b) (5%) Find a formula for $\mathbf{x}_k$ involving k and the eigenvectors $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

8. Find the equation $y=\beta_0+\beta_1 x$ of the least-squares line that best fits the given data points: $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$.

9. Let A and B be symmetric $n \times n$ matrices whose eigenvalues are all positive. Show that the eigenvalues of $A+B$ are all positive.

10. Find the change of variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ that transforms the quadratic form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ into $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ as shown $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$.