

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。


國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院
丙組

科目代碼：0601

考試科目：微積分

— 作答注意事項 —

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 作答中如有發現試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (10%) 求極限 (limit)：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_0^x (\cos t)^{2020} dt \right).$$

2. (10%) 給定函數

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0.$$

(A) (5%) 求一階導函數 $f'(x)$.

(B) (5%) 請求出 $f(x)$ 的最大值 (absolute maximum)。

3. (10%) 令 Ω_1 為曲線 $y = \frac{1}{x}$ 與 x -軸在 $[1, 5]$ 閉區間所圍成之平面區域； Ω_2 為曲線 $y = e^x$ 與 x -軸在 $[0, b]$ 閉區間所圍成之平面區域。試求正數 b 使得 Ω_1 與 Ω_2 有相同面積。

4. (10%) 假設 f 在 $[0, 3]$ 閉區間為一連續函數且在 $(0, 3)$ 開區間為可微分；並且已知 f 在 $[1, 2]$ 閉區間有最大值 1、最小值 -1 。令函數 $F: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ 定義如下：

$$F(x) = \int_0^x [f^2(t) + 1] dt, \quad x \in [0, 3].$$

(A) (5%) 試說明函數 F 有反函數 F^{-1} 。

(B) (5%) 請求出 $(F^{-1})'$ 在 $[F(1), F(2)]$ 閉區間內之最大與最小值。

5. (10%) 求不定積分：

$$\int \sin(\ln x) dx.$$

國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

6. (10%) 假設 $K > 0$ 為一常數，求下列初始值問題 (initial-value problem) 的解：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ky(M - y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

7. (10%) 假設數列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 令

$$M_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

試問數列 $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是否收斂？

8. (15%) 假設一個長方體其六個面的表面積總和為固定常數 $S (S > 0)$ ，試求其長、寬、高使該長方體之體積有最大值。
9. (8%) 給定三維空間中的一個四面體如下：

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x, 0 \leq z \leq 2 - x - y\}.$$

請計算此四面體 T 的體積。

10. (7%) 計算下列線積分：

$$\int_C y dx + x dy.$$

其中 C 是連接點 $(1, 0)$ 至點 $(0, 1)$ 的線段。