

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。


國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所
乙組

科目代碼：4801

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 作答中如有發現試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所 碩士班 乙組

考試科目 (4801)：微積分

共 頁，第 頁 *請在【答案卷、卡】作答

第一題填充部分，請將答案依照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。

第二至六題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分。

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{2x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) If $f(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1-t^2}{1+t^4} dt$, then $f'(\frac{\pi}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(c) Find the sum of the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1 - \frac{1}{n!})$. Ans: .

(d) Find the length of the space curve $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 2t^{3/2})$, $0 \leq t \leq 1$. Ans: .

(e) Evaluate the double integral $\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2) dx dy$. Ans: .

(f) Evaluate the line integral $\oint_C y^3 dx - x^3 dy$, where C is the unit circle $x^2 + y^2 = 1$. Ans: .

2. (10 pts) Define

$$F(t) = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t e^{-x^2} dx$$

for $t > 0$. Show that F is a strictly decreasing function of t .

3. (10 pts) Suppose that $x + y + z + w = 3$ and $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 8$. Find the maximum and minimum values of w .

4. (12 pts) Find the local extreme values and saddle points of the function $f(x, y) = e^y (y^2 - x^2)$.

5. (12 pts) Find the function f such that

$$f'(x) = f(x)(1 - f(x)) \quad \text{and} \quad f(0) = \frac{1}{3}.$$

6. (14 pts) Let $t > -1$.

(a) Show that $\int_0^1 x^t \log x dx$ exists.

(b) Evaluate the integral in (a) by considering

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 x^t dx \right).$$

(c) Let n be a positive integer. Evaluate the integral

$$\int_0^1 x^t (\log x)^n dx.$$