國立政治大學九十六學年度研究所博碩士班入學考試命題紙 第1頁，共1頁

考試科目	線性代數	8111.8116 所別	應用數學	考試時間	3月17日 星期六	第二節

注意事項

1. 請儘量完整回答會寫的問題, 這會比每題都只做一小部份得到較高成績。
2. 請將理由陳述清楚, 引用定理請說明用到的定理內容, 如果答案太短可能需要提供該定理的證明。

Problem 1. (10 pts) Prove or give a counterexample. Let A be an $n \times n$ real symmetric matrix. For any column vectors $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$, define

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T A x.$$

Then $\langle\, , \,\rangle$ is an inner product on $\mathbb{R}^n$.

Problem 2. (10 pts) Prove or give a counterexample. All 3×3 real matrix has a corresponding Jordan Canonical Form.

Problem 3. (20 pts) Let A be an $n \times n$ Hermitian matrix, that is, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Prove the following statements.

(1) All eigenvalues of A must be real.
(2) Eigenvectors corresponding to different eigenvalues are orthogonal.

Problem 4. (20 pts) Let $P_2(\mathbb{R})$ be the vector space of real polynomials of degree at most two. Define an inner product on $P_2(\mathbb{R})$ by

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt.$$

Suppose $S = \text{span}\{1, x\}$. If $\|\cdot\|$ is the norm induced by the inner product $\langle\, , \,\rangle$, find all $h(x)$ in S such that

$$\|h(x) - x^2\|$$

is minimal. Justify your answer.

Problem 5. (20 pts) Let A be an $n \times n$ real matrix, where n is an even positive integer. If $AB = BA$ for all $n \times n$ real matrix B, show that $\det(A) \geq 0$.

Problem 6. (20 pts) Let $P_1(\mathbb{R})$ be the vector space of real polynomials of degree at most one. Suppose $T\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ is a linear transformation defined by $T(a + bx) = 5a + 2b + (a + 4b)x$. Find $T^{100}(a + bx)$.

備考	試題隨卷繳交
命題委員：	056 （簽章） 年 月 日

命題紙使用說明：1.試題將用原件印製，敬請使用黑色墨水正楷書寫或打字（紅色不能製版請勿使用）。
2.書寫時請勿超出格外，以免印製不清。
3.試題由郵寄遞者請以掛號寄出，以免遺失而示慎重。