國立高雄大學 108 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

1. 回答下列問題，並定義所使用之符號，如令$f(x)$為某連續型隨機變數之機率密度函數。

   (a) (5%) 定義何為充分統計量(sufficient statistics)；

   (b) (5%) 定義何為最大概似函數估計量(maximum likelihood estimator)；

   (c) (5%) 定義何為假設檢定中之型一誤差與型二誤差(Type I error & Type II error)。

2. (15%) 考慮一二變量(X,Y)之聯合機率密度函數如下：

$$f_{X,Y}(x,y)=e^{-y};0<x<y<\infty.$$

   試算機率值$P(X+Y\geq 1)$。

3. (15%) 考量兩獨立隨機變數X和Y服從標準常態分佈，即 $X\sim N(0,1)$和$Y\sim N(0,1)$。試求

   $U=X/Y$與$V=|Y|$之聯合密度函數。

4. 若一函數$g(x)$為凸函數(convex function)，且一隨機變數X之期望值$\mathrm{E}(X)$與$\mathrm{E}\big(g(X)\big)$皆存

   在，則$\mathrm{E}\big(g(X)\big)\geq g\big(\mathrm{E}(X)\big)$。試利用此不等式證明：

   (a) (5%) $\mathrm{E}(X^2)\geq\{E(X)\}^2$；

   (b) (5%) $\mathrm{E}(1/X)\geq 1/\mathrm{E}(X)$，其中$\mathrm{P}(X>0)=1$。

5. 考慮一組獨立之隨機樣本$X_1,\ldots,X_n$皆服從密度函數為$f(x|\theta)=e^{-(x-\theta)},x\geq\theta$之分佈，其中

   $\theta\in R$。試求：

   (a) (5%) 參數θ之概似函數(likelihood function)；

   (b) (5%) 虛無假設$H_0:\theta\leq\theta_0$與對立假設$H_a:\theta>\theta_0$概似比檢定(likelihood-ratio test)之拒

   絕域。

(c) (10%) 試根據上述拒絕域，求$H_0: \theta \le \theta_0$ $vs.$ $H_a: \theta > \theta_0$顯著水準為α之概似比檢定。

6. 假設一組獨立之隨機樣本$X_1, \dots, X_n$皆服從伯努利(bernoulli)分佈，即$X_i \sim Ber(p)$，其中 $p \in (0,1)$為試驗成功之機率。假設p之事前分佈(prior distribution)為$\text{Beta}(\alpha, \beta)$：

$$f(p) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1},\ p \in (0,1), \quad \alpha, \beta > 0.$$

(a) (5%) 試求p之事後分佈(posterior distribution)；

(b) (5%) 試驗證p之貝氏估計量(Bayes estimator)為p之事先分佈期望值與p之最大概似估計量之線性組合；

(c) (5%) 試根據上述結果解釋貝氏估計量如何再樣本數n大或小時，如何偏重事先分佈與觀測樣本所提供之訊息進行估計。

7. 試回答下列敘述正確或錯誤。

(a) (5%) 輔助統計量(ancillary statistic)之分佈與樣本母體參數θ無關，故與充份統計量獨立；

(b) (5%) 母體參數θ之一致最小變異不偏估計量(uniformly minimum variance unbiased estimator)，是θ所有估計量中，變異數最小之估計量。