

國立臺灣科技大學 108 學年度碩士班招生試題

系所組別：營建工程系碩士班丙組

科目：工程數學

(總分為 100 分)

一、已知 3×3 之對稱矩陣 (symmetric matrix) A 為實矩陣 (real matrix)，且 A 之 2 組特徵值 (eigen-value)

與特徵向量 (eigen-vector) 分別為 $\lambda_1 = 2$ ， $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 及 $\lambda_2 = -1$ ， $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，另選定一測試向量為

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 並得知 } \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}。$$

(1) 試求第三組特徵值 λ_3 與特徵向量 \mathbf{e}_3 。(10%)

(2) 試求矩陣 A 。(5%)

(3) 試求 $A^{\frac{1}{2}}$ 。(5%)

二、已知 $y_1 = e^x$ 為 2 階微分方程式 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 之一個已知解，試求此微分方程式之通解 (general solution)。(15%)

三、求微分方程 $y'' + 2y' + y = x + e^{-x}$ 之通解 (general solution)。(15%)

四、試以 Laplace Transform 法求解下列初始值二階常微分方程式問題。(20%)

$$y''(t) + 2y'(t) = h(t) = \begin{cases} 2 \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

五、試以傅利葉級數 (Fourier Series) 展開描述下列週期性函數 $g(x)$ 。(15%)

$$g(x) = -2x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{and} \quad g(x + 2n) = g(x), \quad n : \text{integer}$$

六、 $x-y$ 平面上有某一力場 $\mathbf{F} = 3xy\mathbf{i} + (x^2 + 2y)\mathbf{j}$ ，試求此力場沿著曲線 $C: y = x^2 + x$ 由 $(0,0)$ 到 $(1,2)$ 所作之總功。(15%)

