

長庚大學108學年度研究所碩士班招生考試試題

系所：工商管理學系碩士班

考試科目：微積分

注意：請詳細閱讀下列試題，並請標明題號依試題順序將答案書寫於答案卷上。 本試題共 | 頁：第 | 頁

本試卷含計算、繪圖與證明，共有 10 題，每題 10 分。請依題號作答，並列出計算或證明的過程。本試卷將依照推導過程的完整與正確程度，酌予給分。

1. 試求：在二維平面上， $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ， $x = -1$ ， $x = 2$ 與 x 軸所圍成區域的面積。
2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^n$ 之值。
3. 請找出 a 值的範圍，使得曲線 $y + y^3 - x^3 - a \cdot x^2 - x = 0$ 有水平切線。
4. 請描繪出函數 $h(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ 的圖形，並標示出(若有存在)相對極大值(relative maximum)和反曲點(inflexion point)之座標。
5. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$ 之值。
6. 若 $y = f(x)$ 是一個可微分(differentiable)函數且滿足 $y = x^{x+y}$ 之關係，求 $y'(1)$ 。
7. 設 $F(x) = \int_0^x 3^t dt$ 。試求 $F'\left(\frac{2}{\ln 3}\right)$ ，即 $F(x) = \frac{2}{\ln 3}$ 的解。
8. 若 $f(x, y)$ 具有連續的二階偏導函數(second-order partial derivatives)，且 $x = \xi + \eta$ 及 $y = \xi - \eta$ ，現將 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 表示為 $c \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$ ，試求常數 c 的值。
9. 請利用當 $x > 0$ 時， $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 存有極大值，證明： $e^\pi > \pi^e$ 。
10. 令 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ ， $-1 < x < 1$ 。求一階導函數 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數(Taylor series)。

[END]