

中原大學 108 學年度碩士班考試入學

108/3/6 8:00 AM~9:30 AM

誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

應用數學系數學組

科目：微積分(分「微積分(A)」及「微積分(B)」兩部份計分，各佔50分) (共1頁，第1頁)

可使用計算機(僅限於四則運算、三角函數及對數等基本功能，可程式之功能不可使用)

不可使用計算機

----- (不可直接作答於試題，請作答於答案卷) -----

一、微積分(A)，共50分

1. 試求下列各極限：

(a)(8分) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sin(x - 3)}$

(b)(8分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{n!}$

2. 試求下列各函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ ：

(a)(8分) $f(x) = x^{\sin x}$

(b)(8分) $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$

3. (10分) 已知直線 $y = m(x - a)$ 與曲線 $y = \tan^{-1} x$ 相切於點 $(-1, -\pi/4)$ ，試求 m 與 a 之值。

4. (8分) 試計算不定積分 $\int \sec x dx$

二、微積分(B)，共50分

1. (8分) 設

$$f(x, y) = x^{y^y} + (\ln x)(\tan^{-1}(\tan^{-1}(\sin(\cos xy) - \ln(x + y)))) \quad (x > 0, y > 0).$$

試求 $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1000)$

2. 判斷下列各級數收斂或發散：

(a)(8分) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$

(b)(8分) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$

3. 設

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

試求下列各極限：

(a)(6分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right]$

(b)(6分) $\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right]$

(c)(6分) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

4. (8分) 試求重積分 $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y} dx dy$.